

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: HÀM SỐ VÀ CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM	10
I. Tính đơn điệu của hàm số.....	10
II. Cực trị của hàm số và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.....	49
III. Đường tiệm cận	152
IV. Các dạng đồ thị hàm số thường gặp	181
V. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số.....	205
VI. Tổng ôn tập chủ đề 1	222
CHỦ ĐỀ 2. HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT	240
I. Lũy thừa – Hàm số lũy thừa	240
II. Logarit – Hàm số logarit.....	243
III. Hàm số mũ	244
IV. Ứng dụng của hàm số mũ, hàm số logarit trong thực tế.....	246
V. Phương trình mũ và phương trình logarit.....	272
VI. Các bài toán biến đổi logarit.....	292
VII. Tổng ôn tập chủ đề	323
CHỦ ĐỀ 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG	333
I. Nguyên hàm và các tính chất cơ bản	333
II. Hai phương pháp cơ bản để tìm nguyên hàm.....	334
III. Các dạng toán về nguyên hàm.....	338
IV. Bổ sung một số vấn đề về nguyên hàm	344
V. Khái niệm và các tính chất cơ bản của tích phân	358
VI. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân.....	360
VII. Ứng dụng hình học của tích phân	363
VIII. Một số bài toán tích phân gốc thường gặp	369
IX. Ứng dụng của nguyên hàm, tích phân trong thực tế	396
X. Tổng ôn tập chủ đề 3.....	404

CHỦ ĐỀ 4. SỐ PHỨC.....	416
I. Số phức	416
II. Các phép toán với số phức.....	417
III. Tổng ôn tập chủ đề 4	452
CHỦ ĐỀ 5. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ KHỐI ĐA DIỆN QUEN THUỘC.....	457
I. Khái niệm về hình đa diện và khối đa diện	457
II. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều	460
III. Thể tích khối đa diện.....	461
IV. Tổng ôn tập chủ đề 5	501
CHỦ ĐỀ 6. MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN.....	507
I. Mặt cầu, khối cầu	507
II. Mặt nón, hình nón, khối nón	541
III. Mặt trụ, hình trụ, khối nón.....	547
IV. Tổng ôn tập chủ đề 6	564
CHỦ ĐỀ 7. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	571
I. Hệ tọa độ trong không gian.....	571
II. Phương trình mặt phẳng.....	573
III. Phương trình đường thẳng.....	581
IV. Mặt cầu.....	626
V. Tổng ôn tập chủ đề 7.....	641

Chủ đề I

Vấn đề cần nắm:

- I. Tính đơn điệu của hàm số
- II. Cực trị hàm số
- III. GTLN, GTNN của hàm số và ứng dụng
- IV. Đường tiệm cận
- V. Các dạng đồ thị
- VI. Tương giao

Hàm số và các ứng dụng của đạo hàm

I. Tính đơn điệu của hàm số

A. Lý thuyết

1. Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K (với K là một khoảng (đoạn), nửa khoảng) được gọi chung là hàm số **đơn điệu** trên K .

2. Tính đơn điệu của hàm số và dấu của đạo hàm

Định lý

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- a. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- b. Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K .

Tóm lại, trên K :

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến.}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến.}$$

Chú ý

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì $f(x)$ không đổi trên K .

Định lý mở rộng

1. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

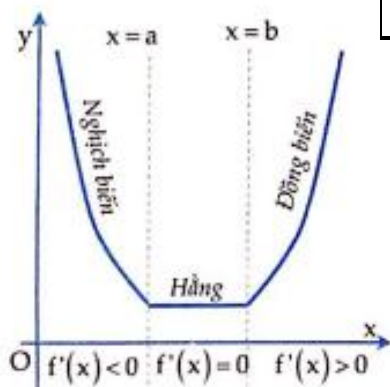
- a. Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số đồng biến trên K .
- b. Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số nghịch biến trên K .
- c. Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số không đổi trên K .

2. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[a; b)$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$

- a. Nếu $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa khoảng $[a; b)$.
- b. Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm số không đổi trên nửa khoảng $[a; b)$.

- Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị hàm số đi lên từ trái sang phải.
- Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải (hình 1.1).

Ví dụ: Hàm số có đồ thị ở hình 1.1 **ngược biến** trên khoảng $(-\infty; a)$, **không đổi** trên khoảng $(a; b)$ và **đồng biến** trên khoảng $(b; +\infty)$.



Hình 1.1

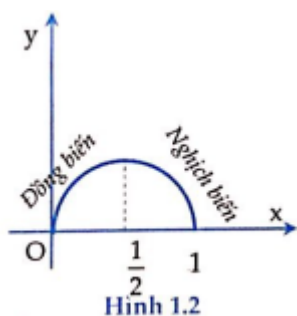
STUDY TIP

Với các hàm sơ cấp, để xét dấu của đạo hàm trên khoảng $(x_n; x_{n+1})$ vừa tìm được hay không, ta chỉ cần xét dấu của đạo hàm **tại một điểm** trên khoảng đó.

Dạng 1

STUDY TIP

Ở đây ta chọn STEP $\left(STEP = \frac{b-a}{20} \right)$ với $(a; b)$ là khoảng cần xét là 0.1 bởi khoảng khá nhỏ, và ta cần xét tính đồng biến, nghịch biến trên 2 khoảng là $\left(0; \frac{1}{2} \right)$ và $\left(\frac{1}{2}; 1 \right)$.



Hình 1.2

Ta có thể nói rằng hàm số có đồ thị ở hình 1.1 nghịch biến trên $(-\infty; a]$ bởi $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (-\infty; a]$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại $x = a$ (tức là hữu hạn nghiệm).

Lí giải:

Ở phần trên về cách xác định tính đơn điệu của hàm số bằng đạo hàm phải có điều kiện dấu bằng xảy ra tại hữu hạn nghiệm bởi: Nếu là vô hạn nghiệm, hay là xảy ra trên toàn khoảng đó thì hàm số không còn tính đơn điệu nữa, mà là hàm không đổi trên khoảng đó. Ví dụ như ở hàm số có đồ thị như hình 1.1 thì trên $(a; b)$ hàm số là hàm hằng.

3. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

- Tìm tập xác định.
- Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ làm cho đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- Sắp xếp các điểm tìm được theo thứ tự tăng dần và xét dấu của đạo hàm trên các khoảng $(x_i; x_{i+1})$.
- Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Bài toán không chứa tham số

Ví dụ 1: Hàm số $y = \sqrt{x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng:

- A. $\left(\frac{1}{2}; 1 \right)$ B. $\left(0; \frac{1}{2} \right)$ C. $(-\infty; 0)$ D. $(1; +\infty)$

Đáp án A.

Phân tích: Để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số thì ta đi tìm nghiệm của phương trình $y' = 0$ hoặc giá trị làm cho phương trình $y' = 0$ không xác định, từ đó tìm được các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $x \in [0; 1]$

Ta có $y' = \left(\sqrt{x - x^2} \right)' = \frac{-2x + 1}{2\sqrt{x - x^2}}$; $y' = 0$ khi $x = \frac{1}{2} \in [0; 1]$.

Ta có $y' < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + 1}{2\sqrt{x - x^2}} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 1$ do đó hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; 1 \right)$.

Hình 1.2 là đồ thị hàm số $y = \sqrt{x - x^2}$, ta thấy bài làm đã xác định đúng.

Cách 2: Nhận thấy điều kiện là $x \in [0; 1]$, do vậy loại luôn C và D.

Sử dụng máy tính

Sử dụng lệnh TABLE để liệt kê các giá trị của hàm số khi cho x chạy trên khoảng cần xét với bước nhảy nhất định.

Ở B và A, các đầu mút của các khoảng cách nhau 0,5, do vậy ta có thể chọn được STEP khi sử dụng TABLE trong máy tính.

Giải thích:

Lệnh TABLE trong máy tính dùng để tính giá trị của hàm số tại một vài điểm. Ta có thể sử dụng chức năng tính giá trị của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Bởi vậy, khi sử dụng TABLE trong việc xác định hàm số đồng biến hay nghịch biến trong một khoảng là khá dễ dàng, bởi ta chỉ cần xét xem giá trị của hàm số tăng hay giảm khi x chạy trên khoảng đó thôi.

Thao tác:

1. Ấn **MODE** **7**, nhập hàm số cần tính giá trị.
2. START? Nhập x bắt đầu từ đâu.
3. END? Nhập x kết thúc ở đâu.
4. STEP? Bước nhảy giữa các giá trị, tính từ điểm đầu mút.

Áp dụng vào bài toán này ta được:

Ấn **MODE** **7**, và nhập $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ ấn **=**.

START? Nhập **0** **=**.

END? Nhập **1** **=**.

STEP? Nhập **0** **.** **1** **=**.

Sau khi nhập máy hiện như hình bên:

Nhận thấy từ khi x chạy từ 0 đến $0,5 = \frac{1}{2}$ thì giá trị của hàm số tăng, tức hàm số đồng biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Còn với x chạy từ $\frac{1}{2}$ đến 1 thì giá trị của hàm số giảm, tức hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Chọn A.

Xét bài toán tổng quát sau:

Xét sự biến thiên của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2 + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases}$$

+) TH1: $\frac{b}{a} < 0$

Ghi nhớ

Từ bài toán tổng quát bên, ta đưa ra các kết luận sau về sự biến thiên của hàm số

$$y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$$

* Trường hợp $\frac{b}{a} < 0$

- Với $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên

$$\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; 0\right) \text{ và}$$

$$\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; +\infty\right); \text{ nghịch}$$

$$\text{biến trên } \left(-\infty; -\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$$

$$\text{và } \left(0; \sqrt{-\frac{b}{2a}}\right).$$

- Với $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên

$$\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; 0\right) \text{ và}$$

$$\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; +\infty\right); \text{ đồng}$$

$$\text{biến trên } \left(-\infty; -\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$$

$$\text{và } \left(0; \sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$$

* Trường hợp $\frac{b}{a} \geq 0$

- Với $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

- Với $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

$$* \text{ Với } \frac{b}{a} < 0 \text{ và } a > 0 \text{ (hay } a > 0; b < 0) \text{ thì } 2ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{-\frac{b}{2a}} \\ x = \sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{cases}$$

Lúc này ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	0	$\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ nghịch biến trên

$$\left(-\infty; -\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) \text{ và } \left(0; \sqrt{-\frac{b}{2a}}\right); \text{ hàm số đồng biến trên } \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; 0\right) \text{ và}$$

$$\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; +\infty\right).$$

$$* \text{ Với } \frac{b}{a} < 0 \text{ và } a < 0 \text{ (hay } a < 0; b > 0) \text{ thì } 2ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{-\frac{b}{2a}} \\ x = \sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{cases}$$

Lúc này ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	0	$\sqrt{-\frac{b}{2a}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ nghịch biến trên

$$\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; 0\right) \text{ và } \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; +\infty\right); \text{ hàm số đồng biến trên } \left(-\infty; -\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) \text{ và}$$

$$\left(0; \sqrt{-\frac{b}{2a}}\right).$$

+) TH2:

$$\frac{b}{a} \geq 0 \text{ thì phương trình } 2ax^2 + b = 0:$$

$$+) \text{ vô nghiệm khi } \frac{b}{a} > 0$$

$$+) \text{ có duy nhất một nghiệm } x = 0 \text{ khi } \frac{b}{a} = 0.$$

+) Với $a > 0$ thì ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$; hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

+) Với $a < 0$ thì ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$; hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

STUDY TIP

Với hàm số bậc bốn trùng phương có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

* Nếu $\frac{b}{a} < 0$ thì:

1. Với $a > 0$ thì đồ thị hàm số có dạng chữ W.

W

2. Với $a < 0$ thì đồ thị hàm số có dạng chữ M, (chỉ là mẹo nhớ đồ thị).

M

* Nếu $\frac{b}{a} \geq 0$ thì:

1. Với $a > 0$ đồ thị hàm số có dạng Parabol quay bề lõm lên trên.

✓

2. Với $a < 0$ thì đồ thị hàm số sẽ có dạng Parabol quay bề lõm xuống dưới.

∧

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$. Chọn khẳng định đúng

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$
- D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$

Đáp án A.

Phân tích

Hướng tư duy 1: Ta thấy hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$ có:

- Hệ số $a = \frac{1}{4} > 0; \frac{b}{a} = -8 < 0$ nên áp dụng kết quả của bài toán tổng quát phía trên thì ta có hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$ đồng biến trên $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Hướng tư duy 2: Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$. Như đã

giới thiệu về cách nhớ dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a = \frac{1}{4} > 0$ nên ở đây ta có thể xác định nhanh hàm số đồng biến trên $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Hướng tư duy 3: Sử dụng lệnh TABLE.

Sử dụng lệnh TABLE với START là -5 và END 5 , STEP 1 ta có thể xác định được: giá trị của hàm số tăng khi x chạy từ -2 đến 0 và từ 2 đến 5 , giá trị của hàm số giảm khi x chạy từ -5 đến -2 và từ 0 đến 2 .

Do đó ta có thể xác định được hàm số đồng biến trên $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

STUDY TIP

1. Với hàm số dạng

$$y = \frac{ax+b}{cx+d};$$

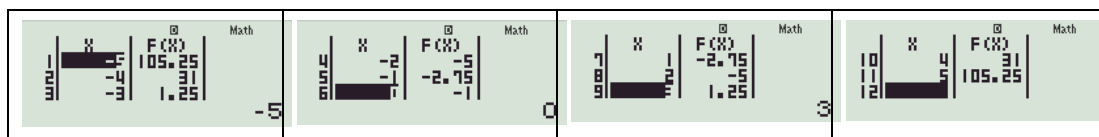
$(ad-bc \neq 0; c \neq 0)$; thì

$$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}, \text{ đặt}$$

$\lambda = ad-bc$ thì:

a. Với $\lambda > 0$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

b. Với $\lambda < 0$ thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.



Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án B.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Ta có $y' = \frac{3.1 - (-3).1}{(x+3)^2} = \frac{6}{(x+3)^2} > 0$ với mọi $x \in D$. Vậy hàm số đồng biến

trên từng khoảng xác định. Tức là hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.

Lưu ý: Ta nói: “Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$ ”. Mà không thể nói “Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ ” hoặc “Hàm số đồng biến trên tập xác định.”

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^2(3-x)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Đáp án C.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Nhận thấy đây là hàm số bậc ba, có hệ số $a = -1 < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0; 2)$.

Nhận xét: Việc nhớ dạng đồ thị giúp ta làm nhanh các bài toán đơn điệu mà không cần vẽ bảng biến thiên.

STUDY TIP

Các mệnh đề nói hàm số đồng biến hay nghịch biến trên một tập số không liên tục, bị gián đoạn là mệnh đề sai.

STUDY TIP

Với hàm số bậc ba có dạng

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$(a \neq 0)$. Nếu phương

trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

Nếu $a > 0$ thì đồ thị hàm số có dạng chữ N, tức hàm số có hai khoảng đồng biến một khoảng nghịch biến.

Còn $a < 0$ thì ngược lại.

Ví dụ 5: Trong các hàm số sau hàm nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^4 + x^2 - 1$

B. $y = \frac{x+1}{x+3}$

C. $y = x^2 + 1$

D. $y = x^3 + x$

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Đáp án D.

Lời giải

Ta có thể loại phương án A, B, C do:

Hàm số bậc bốn trùng phương luôn có khoảng đồng biến và nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tương tự hàm bậc hai có đồ thị dạng parabol nên cũng luôn có khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Còn phương án B: Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất gián đoạn tại $x = -3$, do đó hàm số này không thể luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà chỉ luôn đơn điệu trên từng khoảng xác định.

Qua bài toán trên ta rút ra các kết quả sau:

Kết quả 1: Hàm số bậc bốn trùng phương luôn có một điểm cực trị là $x = 0$, do vậy hàm số bậc bốn trùng phương luôn có khoảng đồng biến, nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Kết quả 2: Hàm bậc hai luôn có một điểm cực đại hoặc một điểm cực tiểu, hoặc nhớ nôm na là đồ thị hàm bậc hai là một parabol, do vậy hàm bậc hai không thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Kết quả 3: Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất không thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$ do hàm số bị gián đoạn tại giá trị làm cho mẫu số không xác định, do đó ta chỉ có thể nói hàm số này đơn điệu trên từng khoảng xác định chứ không nói đơn điệu trên tập xác định hoặc đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Kết quả 4: Để hàm số bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$ (có $\Delta' = b^2 - 3ac$) vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất, tức $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$ (trong công thức này a, b, c lần lượt là các hệ số của hàm bậc ba ban đầu). Lúc này dấu của hệ số a quyết định tính đơn điệu của hàm số.

a. Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b. Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 6: Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai** về hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$?

- A. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$
- B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
- C. Hàm số không có cực trị
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$

Đáp án B.

Lời giải

Từ kết quả 3 ở trên ta chọn luôn B.

Ví dụ 7: Hỏi hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(2; +\infty)$
- B. $(-\infty; 3)$
- C. $(-\infty; 1)$
- D. $(3; +\infty)$

Đáp án D.

Lời giải

Tập xác định: $D = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$y' > 0 \Leftrightarrow x > 2$, kết hợp với điều kiện xác định thì hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Lời giải thông thường

Ta có $y' = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y = x^3 + 3x + 2$ luôn đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Cách 2:

STUDY TIP

Với hàm số bậc ba có dạng

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$(a \neq 0)$. Nếu phương

trình $y' = 0$ vô nghiệm thì:

* Với $a > 0$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

* Với $a < 0$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta thấy phương trình $y' = 0$ vô nghiệm và $a = 1 > 0$ nên hàm số đã cho luôn đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Ví dụ 9: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = \frac{x+1}{x+3}$

B. $y = x^3 + x$

C. $y = \frac{x-1}{x-2}$

D. $y = -x^3 - 3x$

Đáp án B.

Lời giải

- Hàm số dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $\left(x \neq -\frac{d}{c}\right)$ luôn đơn điệu (đồng biến, hoặc nghịch biến) trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

Ta loại ngay hai đáp án A và C.

- Với phương án B:

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x}{\ln x}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

- A. Hàm số luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$
- B. Hàm số luôn nghịch biến trên $(0; e)$ và đồng biến trên $(e; +\infty)$
- C. Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$ và đồng biến trên $(1; +\infty)$
- D. Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$ và $(1; e)$; đồng biến trên $(e; +\infty)$

Câu 2: Cho hàm số $y = x - \ln(x+1)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- B. Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$
- C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$
- D. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$

Câu 3: Hỏi hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-2; 0)$
- B. $(-\infty; -2)$
- C. $(0; +\infty)$
- D. $\mathbb{R}$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên mỗi (từng) khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$
- B. Hàm số nghịch biến trên mỗi (từng) khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$
- C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$
- D. Hàm số nghịch biến với mọi $x \neq 1$

Câu 5: Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; 3)$
- B. $(-2; -1)$

- C. $\mathbb{R}$
- D. $(-1; 3)$

Câu 6: Cho hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + 10$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
- D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-4; 0)$

Câu 7: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và khoảng $(0; 1)$
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$
- C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và khoảng $(0; 1)$
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$

Câu 8: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$
- B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$
- C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$

Câu 9: Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ B. $(0; +\infty)$

C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ D. $(-\infty; 0)$

Câu 10: Biết rằng hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) đồng biến trên $(0; +\infty)$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a < 0; b \leq 0$ B. $ab < 0$
C. $ab \geq 0$ D. $a > 0; b \geq 0$

Câu 11: Hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ nghịch biến trong khoảng nào sau đây:

A. $(-\infty; 0)$ B. $(-2; 0)$
C. $(-2; +\infty)$ D. $(0; +\infty)$

Câu 12: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó:

A. $y = x^3 - x + 1$ B. $y = \frac{x+1}{x-1}$
C. $y = x^3 + 2x - 3$ D. $y = x^4 + 2x^2 + 3$

Câu 13: Hỏi hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng nào??

A. $(-\infty; 2)$ B. $(0; 1)$
C. $(1; 2)$ D. $(1; +\infty)$

Câu 14: Cho hàm số $y = \sin x - \cos x + \sqrt{3}x$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$
B. Hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$
C. Hàm số là hàm lẻ
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

Câu 15: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 7$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(0; 1)$ B. $(0; +\infty)$
C. $(-1; 0)$ D. $(-\infty; 0)$

Câu 16: Hỏi hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(2; +\infty)$ B. $(3; +\infty)$
C. $(-\infty; 1)$ D. $(-\infty; 2)$

Câu 17: Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$

Câu 18: Hàm số $y = \ln(x + 2) + \frac{3}{x + 2}$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 1)$ B. $(1; +\infty)$
C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Câu 19: Hàm số $y = 2x^2 - x^4$ nghịch biến trên những khoảng nào? Tìm đáp án đúng.

A. $(-1; 0); (1; +\infty)$ B. $(-\infty; -1); (0; 1)$
C. $(-1; 0)$ D. $(-1; 1)$

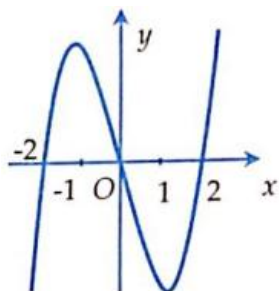
Câu 20: Hàm số $y = \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$ và $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ B. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$
C. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ D. $(-\infty; -1)$

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

Câu 23: Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$
- B. $(-1; 1)$
- C. $(-\infty; +\infty)$
- D. $(-\infty; 0)$

Câu 24: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{x+1}{x+3}$
- B. $y = x^3 + x$
- C. $y = \frac{x-1}{x-2}$
- D. $y = -x^3 - 3x$

Câu 25: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 27: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

Dạng 2

Bài toán chứa tham số

Bài toán: Tìm điều kiện để hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định, hoặc trên từng khoảng xác định.

Kiến thức cơ bản cần nắm

Cho hàm số $y = f(x, m)$, với m là tham số, xác định trên một khoảng K .

- Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in K$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm.
- Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in K$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm.

Chú ý:

Để xét dấu của y' ta thường sử dụng phương pháp hàm số hay định lý về dấu của tam thức bậc hai như sau:

Cho tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

- Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a .
- Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a (trừ $x = -\frac{b}{2a}$)
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình $g(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt, khi đó dấu của $g(x)$ trong khoảng hai nghiệm thì khác dấu với hệ số a , ngoài khoảng hai nghiệm thì cùng dấu với hệ số a .

Các kiến thức cần sử dụng về tam thức bậc hai khi giải bài toán dạng này.

- So sánh nghiệm $x_1; x_2$ của tam giác bậc hai dạng $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ với số 0.

Điều kiện để $x_1 < x_2 < 0$	Điều kiện để $0 < x_1 < x_2$	Điều kiện để $x_1 < 0 < x_2$
là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$	là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$	là $x_1 x_2 < 0$

- So sánh nghiệm $x_1; x_2$ của tam giác bậc hai dạng $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ với $\alpha; \beta$ là hai số thực.

1. Muốn có $x_1 < \alpha < x_2$	ta phải có $a \cdot f(\alpha) < 0$
---------------------------------	------------------------------------

2. Muốn có $x_2 > x_1 > \alpha$	ta phải có $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} > \alpha \end{cases}$
3. Muốn có $x_1 < x_2 < \alpha$	ta phải có $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} < \alpha \end{cases}$
4. Muốn có $x_1 < \alpha < \beta < x_2$	ta phải có $\begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) < 0 \end{cases}$
5. Muốn có $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$	ta phải có $\begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) > 0 \end{cases}$
6. Muốn có $\begin{cases} x_1 < \alpha < x_2 < \beta \\ \alpha < x_1 < \beta < x_2 \end{cases}$	ta phải có $\begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) > 0 \end{cases}$
7. Muốn có $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$	ta phải có $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ \alpha < \frac{x_1 + x_2}{2} < \beta \end{cases}$

Ví dụ minh họa

Tìm m để hàm số $y = f(x; m)$ đơn điệu trên D . Trong đó D có thể là $(-\infty; \alpha)$, $(\alpha; +\infty)$, $(\alpha; \beta)$, $\mathbb{R}$, ...

Phương pháp chung

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số (lưu ý hàm số phải xác định trên D .)

Bước 2: Điều kiện để $y = f(x; m)$ đơn điệu trên D . Chẳng hạn

Hàm số $y = f(x; m)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow f'(x, m) \geq 0$ với mọi $x \in D$. Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

Hàm số $y = f(x; m)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow f'(x, m) \leq 0$ với mọi $x \in D$. Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

Cách 1: Cô lập m .

Bước 3: Độc lập m khỏi biến số và đặt về còn lại là $g(x)$ ta được

STUDY TIP

Trong một số bài toán đơn giản ta có thể thử bằng lệnh MODE 7: TABLE của máy tính cầm tay thay vì làm các bước trong phương pháp ở bên.

$$\begin{cases} m \geq g(x), \forall x \in D \\ m \leq g(x), \forall x \in D \end{cases}$$

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Bước 4: Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $g(x)$ trên D .

Bước 5: Dựa vào bảng biến thiên kết luận

+ Khi $m \geq g(x), \forall x \in D \Rightarrow m \geq \max_D g(x)$

+ Khi $m \leq g(x), \forall x \in D \Rightarrow m \leq \min_D g(x)$

Cách 2: Sử dụng định lý về xét dấu của tam thức bậc hai đối với các hàm số bậc ba có biểu thức đạo hàm là tam thức bậc hai (áp dụng bảng phía trên).

STUDY TIP

Khi xét hàm số bậc ba:

1. Nếu $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép: hàm số đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

2. Nếu $y' = 0$ có 2 nghiệm: hàm số có 2 khoảng đồng biến và 1 khoảng nghịch biến khi $a > 0$ và ngược lại.

* Với hàm số bậc ba dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ thì

+ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta'_{f'} = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

+ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta'_{f'} = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số:

$y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \geq -1$ hoặc $m \leq -2$

B. $-2 < m < -1$

C. $-2 \leq m \leq -1$

D. $m > -1$ hoặc $m < -2$

Đáp án C.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Xét hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1$ có

$$y' = x^2 + 2(m+1)x - (m+1)$$

Do hệ số $a = \frac{1}{3} > 0$ nên để hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định thì phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 + (m+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m+1 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1.$$

Ví dụ 2: Trong tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - mx - m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, giá trị nhỏ nhất của m là:

A. -4

B. -1

C. 0

D. 1

Đáp án B.

Phân tích: Tiếp tục là một hàm số bậc ba, ta xét $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm để tìm giá trị nhỏ nhất của m .

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 + 2mx - m$

Do hệ số $a = \frac{1}{3} > 0$ nên để hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta'_y \leq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } m \text{ thỏa mãn là } m = -1$$

Hình 1.6 là đồ thị hàm số đã cho khi $m = -1$ (thỏa mãn, vậy suy luận trên là đúng).

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 7

B. 4

C. 6

D. 5

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Đáp án A.

Lời giải

Đạo hàm $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$. Để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 + 2mx - 4m - 9 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3(-4m - 9) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên

$$m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3\}$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x - \sqrt{x^2 - x + a}$. Tìm a để hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $a > \frac{1}{4}$

B. $a = \frac{1}{4}$

C. $a < \frac{1}{4}$

D. $a \in \emptyset$

STUDY TIP

Ở đây trước tiên, để hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải xác định trên $\mathbb{R}$. Do vậy ta phải tìm điều kiện để căn thức luôn xác định với mọi số thực x .

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - x + a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 4a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{4}.$$

Với $a \geq \frac{1}{4}$ thì

$$\text{Tính đạo hàm: } y' = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+a}}$$

Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm

$$\text{Ta có } y' \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+a}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+a}} \geq 1$$

Lúc này:

$$2x-1 \geq 2\sqrt{x^2-x+a} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 1 \geq 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ a \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện để hàm số xác định với mọi số thực x thì ta thấy không có giá trị nào của a thỏa mãn.

$$\text{Cách 2: Với } x = 0 \text{ thì } y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{a}} > 0, \forall a \geq \frac{1}{4}.$$

Vậy không có giá trị nào của a để $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Kết quả

Sau bài toán trên ta thấy, với các bài toán hàm căn phức, phân phức thì nếu đề bài yêu cầu tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$, hoặc trên khoảng I nào đó, thì ta cần tìm điều kiện để hàm số luôn xác định trên $\mathbb{R}$ hoặc trên khoảng I đó.

STUDY TIP

Đến đây nhiều độc giả chọn luôn B, hoặc C là sai, nên kết hợp cả điều kiện ban đầu, từ đó rút ra kết luận.

Ví dụ 5: Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ là

- A. $m < -1$ B. $m \leq -1$
C. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ D. $m = 1$

Đáp án B.

Lời giải

Để hàm số đã cho nghịch biến trên $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' = h(x) = -3x^2 + 6x + 3m \leq 0, \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x = g(x), \forall x \in (0; +\infty).$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x$ trên $(0; +\infty)$ ta có $g'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$			$-$	0
$g(x)$		0	-1	$+\infty$

Do $m \leq g(x), \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{(0; +\infty)} g(x) = -1$. Vậy $m \leq -1$ thỏa mãn yêu cầu.

Bài toán trong ví dụ 5 là một bài toán ta hoàn toàn có thể cô lập được m và giải quyết bằng BBT một cách nhanh gọn. Sau đây là một bài toán về tìm m để hàm số đơn điệu trên khoảng cho trước mà ta không cô lập được m .

Ví dụ 6: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

- A. $m \in (-\infty; 1]$ B. $m \in (1; +\infty)$ C. $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ D. $m = 1$

Đáp án A.

Lời giải

Hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m^2 + 6m \geq 0, \forall x > 2.$$

Ta có $\Delta_{y'} = 1$ và phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $\begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$	m	$m+1$	$+\infty$
y'		$+$	0	$+$

STUDY TIP

Ở bài toán trong ví dụ 5 trong hàm số $y' = h(x)$ có tham số m có thể cô lập được nên ta hoàn toàn có thể áp dụng cách cô lập m để tìm điều kiện của m nhanh hơn việc sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc

STUDY TIP

Ở đây ta kết luận được $m+1 \leq 2$ bởi vì nếu $m+1$ hoặc cả m và $m+1$ đều nằm trong khoảng $(2; +\infty)$ thì lúc đó khoảng này có nhiều hơn một khoảng đơn điệu, điều này trái với yêu cầu bài toán.

Chú ý

Ta đưa ra lưu ý: đối với dạng toán này, nếu dấu của đạo hàm phụ thuộc

Nhìn vào bảng xét dấu ta thấy để $y' > 0, \forall x > 2$ thì $m+1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Ví dụ 7: Điều kiện của tham số m để hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6mx - 1$ nghịch biến trên $(0; 2)$ là

- A. $m \leq -6$ B. $m < -6$ C. $m \geq \frac{1}{4}$ D. $-6 \leq m \leq \frac{1}{4}$

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Đáp án A.

Lời giải

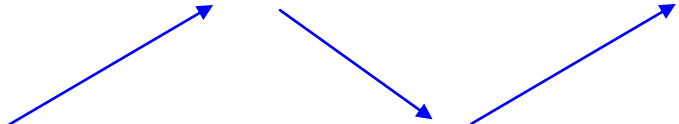
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 + 6x + 6m = 6(x^2 + x + m)$.

Xét phương trình $x^2 + x + m = 0$ có $\Delta = 1 - 4m$.

* Với $m \geq \frac{1}{4}$ ta có $\Delta \leq 0$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó hàm số luôn đồng biến (không thỏa mãn).

* Với $m < \frac{1}{4}$ ta có $\Delta > 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$). Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Từ bảng biến thiên ta thấy điều kiện cần và đủ để hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ là

$x_1 \leq 0 < 2 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1. f'(0) \leq 0 \\ 1. f'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -6$ (áp dụng bảng ở phần lý thuyết về so sánh nghiệm).

Ví dụ 8: Tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x$ đồng biến trên $(2; 3)$ là

STUDY TIP

Với bài toán này, ta chú ý có 3 trường hợp. Nhiều độc giả quên không xét trường hợp m

A.

B.

C. $m \leq \frac{3}{2}$

D. $m \leq \frac{3}{2}; m \neq 1$

Đáp án C.

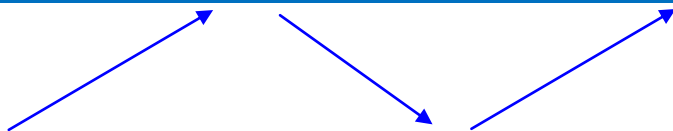
Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6mx + 6m - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2m - 1 \end{cases}$

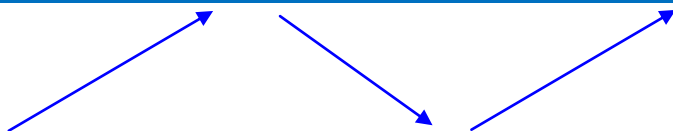
* Nếu $m = 1$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do vậy hàm số cũng đồng biến trên $(2; 3)$.

* Nếu $m > 1$ thì ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ là

x	$-\infty$	1	$2m-1$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Để hàm số đồng biến trên $(2; 3)$ thì $\begin{cases} m > 1 \\ 2m - 1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq \frac{3}{2}$

* Nếu $m > 1$ thì ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	$2m-1$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Để thấy hàm số hiển nhiên đồng biến trên $(2; 3)$.

Kết hợp cả ba trường hợp thì ta có $m \leq \frac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

A. $m > 0$

B. $m < \frac{3}{2}$

C. $m \geq \frac{3}{2}$

D. $m > \frac{3}{2}$

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Do hàm số $t = \sin x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên đặt $\sin x = t; t \in (0; 1)$

Khi đó ta có hàm số $y = f(t) = 2t^3 - 3t^2 + mt; y' = 6t^2 - 6t + m$

STUDY TIP

Ở đây ta có thể loại luôn trường hợp hai bởi xét tổng hai nghiệm không thỏa mãn.

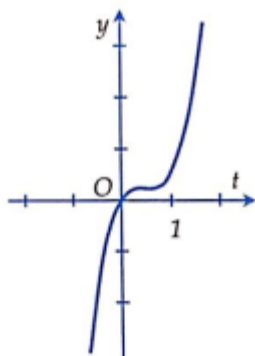
Để hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số $y = f(t)$ phải đồng biến trên $(0;1) \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ hoặc là vô nghiệm, có nghiệm kép (1); hoặc là có hai nghiệm $t_1 < t_2$ thỏa mãn $\begin{cases} t_1 < t_2 < 0 < 1 \\ 0 < 1 < t_1 < t_2 \end{cases}$ (2).

Trường hợp (1): phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 9 - 6m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$$

Trường hợp (2): Thỏa mãn $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ \frac{m}{6} > 0 \\ 1 < 0 \end{cases} \quad (\text{loại})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ \frac{t_1 + t_2}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ \frac{m}{6} - 1 + 1 > 0 \\ \frac{1}{2} > 1 \end{cases}$



Hình 1.4

Cách 2: Ở đây chỉ có hai trường hợp: một là vô nghiệm, có nghiệm kép; hai là $(0;1)$ nằm ngoài khoảng hai nghiệm.

Nhận thấy 3 phương án B, C, D cùng có số $\frac{3}{2}$ nên ta xét $\frac{3}{2}$ trước. Do phương án C có dấu $\geq$ do vậy, ta sẽ xét dấu bằng trước, nếu dấu bằng thỏa mãn thì ta loại luôn B và D

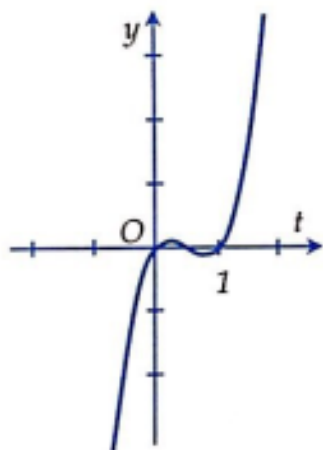
Với $m = \frac{3}{2}$ thì $y' = 6t^2 - 6t + \frac{3}{2} = 6\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ (phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép, thỏa mãn). Đến đây ta loại luôn B và D.

Hình 1.4 là đồ thị hàm số $y = f(t)$ khi $m = \frac{3}{2}$.

Tiếp theo ta chỉ cần xét đến A. Ta sẽ thử $m = 1 \notin \left[\frac{3}{2}; \infty\right)$.

Với $m = 1$ thì $y' = 6t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$, nhận xét $0 < \frac{3 - \sqrt{3}}{6} < \frac{3 + \sqrt{3}}{6} < 1$ (không thỏa mãn). Vậy loại A, chọn C.

Hình 1.5 là đồ thị hàm số $y = f(t)$ khi $m = 1$. Vậy suy luận của ta là đúng.



Hình 1.5

Do $y' = 6t^2 - 6t + m$ là một tam thức bậc hai có hệ số $a > 0$ nên

1. Nếu $\Delta \leq 0$ thì y' cùng dấu với hệ số a (mà $a > 0$) nên hàm số luôn đồng biến.
2. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$. Khi đó, trong khoảng hai nghiệm thì y' khác dấu với a và ngoài khoảng hai nghiệm thì y' cùng dấu với a . Nên để $y' > 0, \forall t \in (0;1)$ thì $(0;1)$ phải nằm ngoài khoảng hai nghiệm.

Nhận xét:

Ở đầu lời giải cách 1, tôi có chỉ rõ rằng “Do hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên đặt $\sin x = t; t \in (0;1)$ ” bởi khi đặt hàm hợp, ta cần lưu ý điều kiện của hàm hợp. Ở bài toán trên nếu thay $\sin x$ bằng $\cos x$, lúc này, nếu đặt $\cos x = t$ và tiếp tục giải như trên thì kết quả đạt được $m \geq \frac{3}{2}$ là hoàn toàn sai. Thật vậy: Với $m = 2$ lúc này hàm số $y = 2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 2\cos x$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Tiếp theo để hiểu rõ hơn vấn đề này, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^4 + (2-m)x^2 + 4 - 2m$ nghịch biến trên $[-1;0]$.

A. $m \geq 4$

B. $m > 4$

C. $m \leq 2$

D. $m < 2$

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Lời giải sai

Nếu làm theo như bài toán trên, ta đặt $t = x^2$, do $x \in [-1;0]$ nên $t \in [0;1]$

Khi đó để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $y = f(t) = t^2 + (2-m)t + 4 - 2m$ phải nghịch biến trên $[0;1]$.

Ta có $y' = f'(t) = 2t + 2 - m$

Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[0;1] \Leftrightarrow f'(t) \leq 0, \forall t \in [0;1]$

$\Leftrightarrow m \geq 2t + 2, \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow m \geq 4$, chọn A.

Nhận xét: Đây là kết quả sai. Thật vậy nếu thử $m=2; m=1; \dots$ vẫn thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Lời giải đúng

Đáp án C.

Cách 1: Ta đặt $t = x^2$, do $x \in [-1; 0]$ nên $t \in [0; 1]$

Khi đó để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $y = f(t) = t^2 + (2-m)t + 4 - 2m$ phải đồng biến trên $[0; 1]$.

Ta có $y' = f'(t) = 2t + 2 - m$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1] \Leftrightarrow f'(t) \geq 0, \forall t \in [0; 1]$

$$\Leftrightarrow m \leq 2t + 2, \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq 2$$

Cách 2: Xét hàm số $y = x^4 + (2-m)x^2 + 4 - 2m$ có

$$y' = 4x^3 + 2(2-m)x = 2x(2x^2 + 2 - m)$$

Để hàm số đã cho nghịch biến trên $[-1; 0]$ thì $y' \leq 0, \forall x \in [-1; 0]$.

Ta có $2x \leq 0, \forall x \in [-1; 0]$, nên để thỏa mãn điều kiện thì

$$(2x^2 + 2 - m) \geq 0, \forall x \in [-1; 0] \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Như vậy, ta rút ra nhận xét sau:

Xét hàm số $f(x) = g(u(x))$ trên I (với I là khoảng (đoạn), nửa khoảng). Đặt $u(x) = t; t \in K$ (với K là một khoảng (đoạn), nửa khoảng được tính chặt chẽ theo điều kiện của x).

1. Nếu $u(x)$ là hàm số đồng biến trên I thì hàm số thu được sau khi đặt ẩn phụ hay chính là hàm $g(t)$ cùng tính đơn điệu trên K với hàm số ban đầu.

2. Nếu $u(x)$ là hàm số nghịch biến trên I thì hàm số thu được sau khi đặt ẩn phụ hay chính là hàm $g(t)$ ngược tính đơn điệu trên K với hàm số ban đầu.

Thường trong trường hợp này ta không đặt ẩn mà giải quyết bài toán bằng cách đạo hàm trực tiếp.

Ví dụ 10: Điều kiện cần và đủ của m để hàm số $y = \frac{mx+5}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là

A. $m > -5$

B. $m \geq -5$

C. $m \geq 5$

D. $m > 5$

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{m-5}{(x+1)^2}$ để hàm số đã cho luôn đồng biến trên từng khoảng xác định thì $m-5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$.

Hàm số dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; ($ad-bc \neq 0$; $c \neq 0$) có đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ luôn đơn điệu trên từng khoảng xác định. (chứ không phải trên tập xác định)
Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $ad-bc > 0$, nghịch biến trên từng khoảng xác định khi $ad-bc < 0$.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \frac{mx+2-2m}{x+m}$ (1) (m là tham số). Tìm m để hàm số (1) đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $-3 \leq m \leq 1$ B. $-3 < m < 1$ C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m > -1 + \sqrt{3} \\ m < -1 - \sqrt{3} \end{cases}$

Đáp án D.

Phân tích: Một bài toán về hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nhưng có tham số ở mẫu. Nếu bài toán hỏi “Tìm m để hàm số (1) nghịch biến (hoặc đồng biến) trên một khoảng (a, b) nhất định thì bài toán lại phải thêm điều kiện, tuy nhiên, ở đây ta có thể giải đơn giản như sau:

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -m$.

Ta có $y' = \frac{m^2+2m-2}{(x+m)^2}$. Để hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định thì $m^2+2m-2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 + \sqrt{3} \\ m < -1 - \sqrt{3} \end{cases}$ (đến đây ta loại luôn được A, B, C).

Ví dụ 12: Tìm m để hàm số $y = \frac{x+2-2m}{x+m}$ đồng biến trên $(-1; 2)$.

- A. $m > \frac{2}{3}$ B. $m \geq 1$ C. $-2 < m < \frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3} < m < 1$

Đáp án B.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus -m$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $(-1; 2)$ thì $y' > 0$ với mọi $x \in (-1; 2)$

STUDY TIP

Hàm số đơn điệu trên khoảng nào thì phải xác định trên khoảng đó trước. Do vậy ở đây cần có điều kiện cho $-m \notin (-1; 2)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - (2 - 2m) > 0 \\ -m \notin (-1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 2 > 0 \\ m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

Chú ý:

Phải có điều kiện $-m$ nằm ngoài khoảng $(-1; 2)$ bởi nếu $-m$ nằm trong khoảng $(-1; 2)$ thì hàm số bị gián đoạn trên $(-1; 2)$. Tức là không thể đồng biến trên $(-1; 2)$ được. Đây là phần mà tôi muốn nhấn mạnh với quý độc giả. Bởi nếu không có điều kiện đó, sẽ chọn thành A là sai.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = \frac{mx + 2m - 3}{x - m}$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- A. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; 2]$ B. $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$
C. $m \in (-\infty; -3)$ D. $m \in (1; +\infty)$

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Đáp án A.

Lời giải

Từ **STUDY TIP** trên ta có được hàm số đơn điệu trên khoảng nào thì phải xác định trong khoảng đó trước, do vậy trong ví dụ này, ta phải có điều kiện để $m \notin (2; +\infty)$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Ta có $y' = \frac{-m^2 - 2m + 3}{(x - m)^2}$. Hàm số $y = \frac{(mx + 2m - 3)}{x - m}$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$ khi

và chỉ khi:

$$\begin{cases} y' < 0 \\ m \notin (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 2m + 3 < 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m \leq 2 \\ m < -3 \end{cases}$$

Phân tích sai lầm: Ở đây nhiều độc giả không xét điều kiện để hàm số luôn xác định trên $(2; +\infty)$ nên chọn B là sai.

STUDY TIP

Trong bài toán này do hệ số bậc cao nhất của tam thức $3x^2 + 6x + m$

Ví dụ 14: Giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 là

A. $m = 2$

B. $m = 4$

C. $m = -1$

D. $m = 0$

Đáp án D.

Lời giải

Để hàm số đã cho nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 2

$$\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 6x + m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \text{ sao cho } |x_1 - x_2| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ 4 - \frac{4m}{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Ví dụ 15: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - mx - 10$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

A. $m = 2$

B. $m = -4$

C. $m = -\frac{15}{4}$

D. $m = \frac{15}{4}$

Đáp án C.

Lời giải

Để hàm số đã cho nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 1

$$\Leftrightarrow y' = x^2 + 4x - m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \text{ sao cho } |x_1 - x_2| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ |x_1 - x_2|^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + m > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ m = -\frac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{15}{4}.$$

STUDY TIP

Hàm số bậc ba đơn điệu (nghịch biến khi $a > 0$ hoặc đồng biến khi $a < 0$) trên một khoảng có độ dài bằng d khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2$

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{e^x - m - 2}{e^x - m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\ln \frac{1}{4}; 0\right)$

- A. $m \in [-1; 2]$ B. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$
C. $m \in (1; 2)$ D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup [1; 2)$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+3}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

- A. $m < -3$ B. $m \leq -3$
C. $m \leq 3$ D. $m > -3$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{(m-1)\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(17; 37)$.

- A. $-4 \leq m < -1$ B. $\begin{cases} m > 2 \\ m \leq -6 \\ -4 \leq m < -1 \end{cases}$
C. $\begin{cases} m > 2 \\ m \leq -4 \end{cases}$ D. $-1 < m < 2$

Câu 4: Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

- A. $m \geq \frac{1}{2}$ B. $m < \frac{1}{2}$
C. $m \leq 0$ D. $m \geq 0$

Câu 5: Để hàm số $y = x^3 - 3mx^2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

- A. $m \leq 0$ B. $m = 0$
C. $m \geq 0$ D. $m < 0$

Câu 6: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}$ B. $m \leq 2$
C. $-2 \leq m \leq -1$ D. $-1 \leq m \leq 0$

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $-2 < m < 1$ B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$
C. $-2 \leq m \leq 1$ D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

- A. $m \leq 1$ B. $m > 3$
C. $m \leq -3$ D. $m \leq 3$

Câu 9: Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \sin x - \cos x + 2017\sqrt{2}mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

- A. $m \geq 2017$ B. $m > 0$
C. $m \geq \frac{1}{2017}$ D. $m \geq -\frac{1}{2017}$

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $m < -1$ B. $m \geq 1$
C. $m \leq 0$ D. $m > -1$

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$:

- A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$ B. $m < 0$
C. $0 < m \leq 1$ D. $m \geq 1$

Câu 12: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 10$ đồng biến trong khoảng $(0; 3)$?

A. $m \geq \frac{12}{7}$

B. $m < \frac{12}{7}$

C. $m \in \mathbb{R}$

D. $m > \frac{7}{12}$

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq \frac{4}{3}$

B. $m \leq \frac{4}{3}$ và $m \neq 0$

C. $m = 0$ hoặc $m \geq \frac{4}{3}$

D. $m \geq \frac{4}{3}$

Câu 14: Giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $m \leq 1$

B. $m < 1$

C. $m \geq -1$

D. $m = 1$

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

A. $m > 2$

B. $m \leq 2$

C. $m < 1$

D. $m \geq 1$

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{mx^2}{2} + 2x + 2017$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$

B. $m \leq 2\sqrt{2}$

C. $-2\sqrt{2} \leq m$

D. $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

Câu 17: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên khoảng từ $(-\infty; +\infty)$

A. $[-4; 2]$

B. $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$

C. $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$

D. $(-4; 2)$

Câu 18: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + x^2 - (2-m)x + 1$ tăng trên đoạn có độ dài bằng 2.

A. $m = -\frac{11}{3}$

B. $m = \frac{7}{3}$

C. $m = \frac{5}{3}$

D. $m = \frac{14}{3}$

Câu 19: Tất cả các giá trị của m để $(C_m): y = x^3 + 3mx^2 + 3(m+1)x + 2$ nghịch biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 4 là

A. $m = \{-1; 2\}$

B. $m \in \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

C. $m \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

D. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$

Câu 20: Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ là

A. $m \in \{-2; -1\}$

B. $m \in [-2; 2]$

C. $m \in (-2; -1]$

D. $m \in (-2; -1)$

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + 3x + 1$ (m là tham số thực). Tìm giá trị nhỏ nhất của m để hàm số trên luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 1$

B. $m = 0$

C. $m = -2$

D. $m = 3$

Câu 22: Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = m \sin x + 7x - 5m + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-7 \leq m \leq 7$

B. $m \leq -1$

C. $m \leq -7$

D. $m \geq 7$

Câu 23: Hàm số:

$y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-5)x - \frac{2}{3}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện của m là:

A. $m \leq -2$

B. $-2 \leq m \leq 2$

C. $m \geq 2$

D. $-2 < m < 2$

Câu 24: Tìm các giá trị của m sao cho hàm số

$$y = \frac{x+1}{x+m} \text{ nghịch biến trên khoảng } (2; +\infty).$$

A. $-2 \leq m < 1$

B. $m = -2$

C. $m \geq 2$

D. $m \leq -2$

Câu 25: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2} + 1$

nghịch biến trên $D = [2; +\infty)$.

A. $m \geq 0$

B. $m \leq -1$

C. $m < -1$

D. $-2 \leq m \leq 1$

Câu 26: Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch

biến trên các khoảng xác định của nó.

A. $1 < m < 2$

B. $1 \leq m \leq 2$

C. $m \geq 2$ hoặc $m \leq 1$

D. $m > 2$ hoặc $m < 1$

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{mx-3}{x+m-4}$. Tất cả các giá

trị của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là:

A. $m = 3$

B. $m = 1$

C. $1 < m < 3$

D. $1 \leq m \leq 3$

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq \frac{4}{3}$

B. $m \leq \frac{4}{3}$ và $m \neq 0$

C. $m = 0$ hoặc $m \geq \frac{4}{3}$

D. $m \geq \frac{4}{3}$

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{3^{-x}-3}{3^{-x}-m}$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.

A. $m < \frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3} < m < 3$.

C. $m \leq \frac{1}{3}$

D. $m > 3$.

Câu 30: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{m-2\sin x}{1+\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $m \geq 1$

B. $m \leq 0$

C. $m \leq \frac{9}{2}$

D. $3 < m \leq 5$.

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Bài tập không chứa tham số

Câu 1: Đáp án D.

Cách 1: Cách tư duy.

Tập xác định: $D = (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \left(\frac{x}{\ln x} \right)' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$;

y' không xác định tại $x = 1$

+ $y' > 0 \forall x \in (e; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(e; +\infty)$.

+ $y' < 0 \forall x \in (0; 1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.

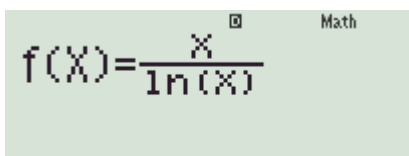
+ $y' < 0 \forall x \in (1; e)$ nên hàm số nghịch biến trên $(1; e)$.

Cách 2: Sử dụng máy tính casio:

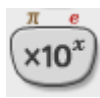
Nhận thấy ở các phương án có các khoảng sau: $(0; +\infty)$; $(0; 1)$; $(0; e)$; $(1; e)$; $(e; +\infty)$.

Lúc này ta sử dụng lệnh MODE 7 TABLE để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số:

Nhập vào máy $F(x) = \frac{x}{\ln x}$:



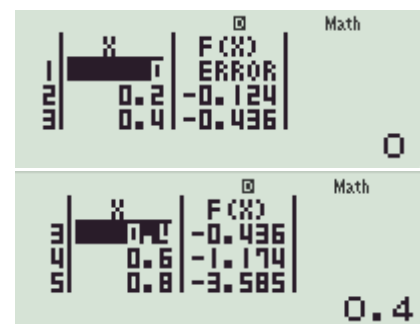
Ấn 2 lần = máy hiện Start ? Ta chọn $x = 0$, ấn 0 =



End ? Ta nhập SHIFT (chính là chọn end là e). Do ở đây ta cho chạy từ 0 đến e bởi ta cần xét

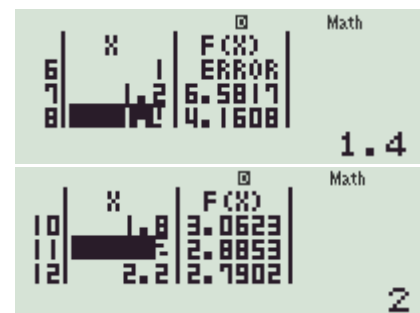
tính đồng biến nghịch biến trên $(0; +\infty)$; $(0; 1)$; $(0; e)$; $(1; e)$.

Ấn = máy hiện Step ? Nhập 0,2 máy hiện như sau:



X	F(X)
0	-0.124
0.2	-0.436
0.4	-0.436
0.6	-1.174
0.8	-3.585

Từ đây ta nhận thấy giá trị của hàm số giảm khi cho x chạy từ 0 đến 1. Vậy hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$; từ đây ta loại A và B. Tiếp theo kéo xuống thì máy hiện:



X	F(X)
1	6.5817
1.2	4.1608
1.4	3.0623
1.6	2.8853
1.8	2.7902

Lúc này ta thấy các giá trị của hàm số tiếp tục giảm khi cho x chạy từ 1 đến e . Do vậy hàm số nghịch biến trên $(1; e)$, từ đây ta loại C, chọn D.

Câu 2: Đáp án D.

Tập xác định: $D = (-1; +\infty) \Rightarrow$ loại A, C.

$y' = [x - \ln(x+1)]' = \frac{x}{x+1}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$y' > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$y' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$

Cách 2: Sử dụng máy tính casio bằng lệnh TABLE trong MODE 7 tương tự bài 1.

Câu 3: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = (x^3 + 3x^2 - 4)' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng N, tức hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$.

Câu 4: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $ad - bc = 1 - 2 = -1 < 0$

Suy ra hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 5: Đáp án D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = (-x^3 + 3x^2 + 9x)' = -3x^2 + 6x + 9$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta thấy hàm số có hệ số $a = -1 < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.

Câu 6: Đáp án D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = (-x^3 - 6x^2 + 10)' = -3x^2 - 12x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Do hệ số $a = -1 < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-4; 0)$

Câu 7: Đáp án C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = (x^4 - 2x^2 - 1)' = 4x^3 - 4x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Do hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng W từ đây suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$; hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 8: Đáp án A.

Vì $f'(x) = x^2(x+2) \geq 0 \forall x \in (-2; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

Câu 9: Đáp án B.

Cách suy luận 1:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = (2x^4 + 1)' = 8x^3.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Vì $y' > 0 \forall x \in (0; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Cách suy luận 2:

Đồ thị hàm số có dạng Parabol có đỉnh là $I(0; 1)$ và hệ số $a = 2 > 0$ nên đồ thị hàm số là Parabol có bề lõm hướng lên, tức hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 10: Đáp án D.

Ở phần sau ta sẽ học về đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương, ở phần dạng đồ thị ta có sơ đồ về dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương. Từ đó ta rút ra nhận xét:

Do hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên đồ thị hàm số không thể có ba điểm cực trị, vậy đồ thị hàm số có dạng parabol quay bề lõm lên trên và có đỉnh là $I(0; c)$.

Áp dụng sơ đồ tôi vừa giới thiệu ở bài sau để thỏa mãn điều kiện trên thì $\begin{cases} a > 0 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

Câu 11: Đáp án D.

Từ việc xem xét sơ đồ tôi giới thiệu ở câu 10 thì ta có: $ab = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-2) > 0$ và $a = -\frac{1}{4} < 0$ nên đồ thị hàm số là parabol quay bề lõm hướng xuống, tức hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 12: Đáp án C.

Phương án A. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = (x^3 - x + 1)' = 3x^2 - 1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$\Rightarrow$ Hàm số này không đồng biến trên tập xác định của nó.

Phương án B. Loại vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Phương án C. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 + 2 > 0 \forall x \in D$$

$\Rightarrow$ Hàm số này đồng biến trên tập xác định của nó.

Câu 13: Đáp án B.

Tập xác định: $D = [0; 2]$.

$$y' = \frac{-2x+2}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vì $y' > 0 \forall x \in (0; 1)$ nên hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

Câu 14: Đáp án D.

$$y' = (\sin x - \cos x + \sqrt{3}x)'$$

$$= \cos x + \sin x + \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right] + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) > 0$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

Câu 15: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng **W**, từ đây suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 16: Đáp án C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus [1; 3]$

$$y' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (không thuộc } D)$$

Vì $y' < 0 \forall x \in (-\infty; 1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 17: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Mặt khác hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng **N**, tức hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Câu 18: Đáp án B.

Tập xác định: $D = (-2; +\infty)$

$$y' = \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{x-1}{(x+2)^2}$$

Vì $y' > 0 \forall x \in (1; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 19: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Mặt khác hệ số $a = -1 < 0$, suy ra đồ thị hàm số có dạng chữ M, tức hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 20: Đáp án D.

Với các bài toán mà ta khó tính đạo hàm, ta nên dùng TABLE để giải quyết bài toán.

Nhập **MODE** **7:TABLE**

Nhập như sau:

$$f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$$

Tiếp theo ấn 2 lần dấu =.

Start? ấn -3 =

End? ấn 3 =

Step? 0.5 =

Máy hiện:

X	F(X)
-3	-3.181
-2.5	-3.491
-2	-4.041

X	F(X)
-2	-4.041
-1.5	-5.366
-1	ERROR

X	F(X)
1.5	0.5773
2	0.8728

X	F(X)
2.5	0.8728
3	1.0606

Từ đây ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

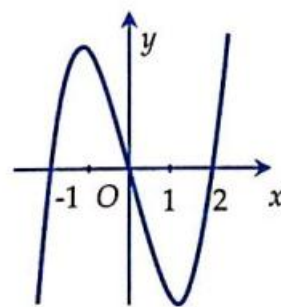
Câu 21: Đáp án C.

Ta thấy hàm số có $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Mặt khác hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ N, tức hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Câu 22: Đáp án B.

Đây là một bài toán dễ mắc sai lầm, do đồ thị trong hình vẽ



Nhận thấy trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$ thì $f'(x) < 0$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Phân tích sai lầm: Nhiều học sinh tưởng đây là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và chọn luôn D.

Câu 23: Đáp án A.

$$\text{Đạo hàm } y' = -\frac{2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Ta có $y' < 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $y' > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.
Nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 24: Đáp án B.

- Hàm số dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}, \left(x \neq -\frac{d}{c}\right)$ luôn đơn điệu (đồng biến, hoặc nghịch biến) trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$. Ta loại ngay hai đáp án A và C.

- Với phương án B: Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 25: Đáp án A.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do $y' < 0, \forall x \in (0; 2)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$;

và $y' > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

Câu 26: Đáp án D.

Ở bài toán này, nhiều bạn không nhìn kĩ đề lại đi xét hàm số $f(x) = x^2 + 1$ là sai. Vì đề cho $f'(x)$ chứ không phải $f(x)$.

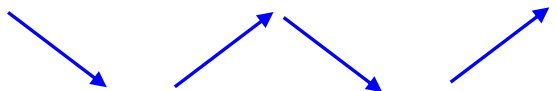
Ta có $f'(x) = x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đây ta loại A; B; C. Chọn D.

Câu 27: Đáp án C.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Dựa vào BBT, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đây đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Dạng 2: Bài toán chứa tham số

Câu 1: Đáp án D.

Đặt $e^x = t (t > 0)$

$$\text{Vì } x \in \left(\ln \frac{1}{4}; 0 \right)$$

$$\Rightarrow t \in \left(\frac{1}{4}; 1 \right) \Rightarrow m^2 \notin \left(\frac{1}{4}; 1 \right) \Rightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = \frac{t-m-2}{t-m^2}; y' = \frac{-m^2+m+2}{(t-m^2)^2}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\ln \frac{1}{4}; 0 \right)$

Khi $y' > 0$ hay $-m^2 + m + 2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2$

Vậy $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$ hoặc $1 \leq m < 2$.

Câu 2: Đáp án A.

Điều kiện: $x \neq m$.

$$y' = \frac{-m-3}{(x-m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow -m-3 > 0 \Leftrightarrow m < -3$$

Câu 3: Đáp án B.

Đặt $\sqrt{x-1} = t$.

Vì $x \in (17; 37) \Rightarrow t \in (4; 6) \Rightarrow m \notin (-6; -4)$

$$y = \frac{(m-1)t+2}{t+m}$$

$$y' = \frac{m^2-m-2}{(t+m)^2}$$

Hàm số đồng biến khi $m^2 - m - 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases}$.

Kết hợp các điều kiện ta có $\begin{cases} m > 2 \\ m \leq -6 \\ -4 \leq m < -1 \end{cases}$

Câu 4: Đáp án A.

$$D = \mathbb{R}; y' = 3x^2 - 6mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}, \text{ mặt khác hàm số có hệ số}$$

$a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ N, suy ra hàm số nghịch biến trên $(0; 2m)$.

Vậy để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ thì

$$2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 5: Đáp án B.

$$D = \mathbb{R}$$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $b^2 - 3ac \leq 0$

$$\Leftrightarrow 0^2 - 3.1.(-3m^2) \leq 0 \Leftrightarrow 9m^2 \leq 0 \Rightarrow m = 0.$$

Câu 6: Đáp án C.

Để hàm số luôn nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ thì

$$b^2 - 3ac \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3.\left(-\frac{1}{3}\right).(3m+2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1.$$

Câu 7: Đáp án A.

Để hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định thì $(m+1).(-m)+2 > 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 2 > 0$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 1.$$

Câu 8: Đáp án C.

$$y' = 3x^2 + 6x - m$$

Phương trình $y' = 0$ có $\Delta' = b^2 - 3ac$

$$= 3^2 - 3.1.(-m) = 9 + 3m$$

Trường hợp 1: đồ thị hàm số có hai điểm cực trị, thì $x = 0$ phải là điểm cực đại, lúc này:

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy hàm số phải luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -3$

Câu 9: Đáp án C.

Ta có $y' = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2017\sqrt{2}m$. Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -2017m$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này xảy ra khi $-2017m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2017}$.

Câu 10: Đáp án C.

Đặt $\sin x = t$

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$

Hàm số trở thành $y = \frac{2t-1}{t-m}$. Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì hàm số $y = \frac{2t-1}{t-m}$ phải đồng biến trên $(0; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc = -2m + 1 > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Vì $m \notin (0; 1)$ nên $m \leq 0$.

Câu 11: Đáp án B.

Cách 1: Đạo hàm trực tiếp

Ta có

$$y' = \left(\frac{\sin x + m}{\sin x - m} \right)' = \frac{\cos x (\sin x - m) - \cos x (\sin x + m)}{(\sin x - m)^2}$$

$$= \frac{-2m \cos x}{(\sin x - m)^2}, \text{ để hàm số nghịch biến trên } \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$$

$$\text{thì } \begin{cases} -2m \cos x < 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases}$$

Do $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ thì $\cos x \in (-1; 0)$, do vậy để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ thì

$$\begin{cases} -2m > 0 \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Cách 2: Đặt ẩn

Đặt $\sin x = t$,

Vì $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ nên $t \in (0; 1)$.

Ta thấy hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ do đó để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì hàm số $y = f(t) = \frac{t+m}{t-m}$ phải đồng biến trên $(0; 1)$

$$\text{Tức là } \begin{cases} ad - bc = -m - m > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$$

Cách 3: Sử dụng TABLE

Ta thấy với $m = 0$ không thỏa mãn, do là hàm hằng nên ta loại A.

Vậy ta sẽ thử $m = 1$; Start $\frac{\pi}{2}$; End π Step $\frac{\pi}{10}$ thì ta được:

X	F(X)
1.570796327	-1.056
1.675458665	-1.068
1.780121003	-1.079

X	F(X)
1.570796327	-1.091
1.675458665	-1.103
1.780121003	-1.115

Vậy với $m = 1$ không thỏa mãn. Do vậy ta loại được C, D. Từ đây ta chọn B.

Câu 12: Đáp án A.

Cách 1: Giải toán thông thường

Ta có $y' = -x^2 + 2(m-1)x + (m+3)$

Ta có $y' = -x^2 + 2(m-1)x + (m+3)$

Hàm số đã cho đồng biến trên $(0;3)$
 $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0;3)$.

Vì hàm số $y'(x)$ liên tục tại $x=0; x=3$ nên
 $y' \geq 0, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [0;3]$ (mục đích là để cô lập tham số m)

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 1}, \forall x \in [0;3].$$

(Do $2x+1 > 0, \forall x \in [0;3]$ nên khi chia cả hai vế không làm đổi dấu bất phương trình).

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [0;3]} g(x) \text{ với } g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 1}$$

$$\text{Mặt khác ta tìm được } \max_{x \in [0;3]} g(x) = g(3) = \frac{12}{7}.$$

$$\text{Vậy } m \geq \frac{12}{7}.$$

Cách 2: Thử giá trị.

Lúc này ta thử một giá trị m nằm trong khoảng $\left(\frac{7}{12}; \frac{12}{7}\right)$ là có thể xác định được kết quả, ta chọn

$$m=1 \text{ khi đó hàm số trở thành } y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x - 10.$$

$$\text{Có } y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do hệ số $a = -\frac{1}{3} < 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-2;2)$ vậy không thỏa mãn đề bài. Vậy loại B, C, D, chọn A.

Câu 13: Đáp án D.

Với $m=0$ thì hàm số trở thành $y=2$ là hàm hằng, loại. Từ đây ta loại A, C.

Với $m \neq 0$:

Đến đây ta không cần thử mà có thể chọn luôn D, bởi hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi hệ số $a > 0$ và phương trình $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm, tuy nhiên với phương án B, $m \leq \frac{4}{3}$ thì m có thể âm, tức hệ số a âm thì không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$ được. Vậy ta chọn D.

Chú ý: Với bài toán này việc hiểu bản chất và suy luận nhanh hơn rất nhiều so với việc bấm máy thử từng phương án.

Câu 14: Đáp án A.

$$\text{Ta có } y' = 3(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 3(2m-3)$$

* $m=1 \Rightarrow y' = -3 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$$* \quad m \neq 1, \text{ hàm số nghịch biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - (2m-3)(m-1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -m+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1. \text{ Vậy } m \leq 1.$$

Câu 15: Đáp án D.

Ta có

$$y' = x^2 + 2(m-1)x + 2m-3 = (x+1)(x+2m-3) \geq 0 \text{ với mọi } x \in (1; +\infty).$$

Do $x > 1$ nên $(x+1) > 0$, nên $(x+2m-3)$ phải ≥ 0 với mọi $x > 1$

$$x+2m-3 \geq 0 \Leftrightarrow 2m-2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$$

Câu 16: Đáp án A.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{mx^2}{2} + 2x + 2017$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{m}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$$

Câu 17: Đáp án A.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi:

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+1)x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = (m+1)^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2.$$

Câu 18: Đáp án D.

Hàm số đã cho tăng trên đoạn có độ dài bằng 2

$$\Leftrightarrow y' = -3x^2 + 2x - (2-m) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \text{ sao cho } |x_1 - x_2| = 2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + 3(m-2) > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2-m}{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{3} \\ m = \frac{14}{3} \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{14}{3}$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 19: Đáp án D.

Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài nhỏ hơn 4 $\Leftrightarrow 3x^2 + 6mx + 3(m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| < 4$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (3m)^2 - 9(m+1) > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 > 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 9m - 9 > 0 \\ (-2m)^2 - 4 \cdot (m+1) > 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 1 > 0 \\ 4m^2 - 4m - 4 > 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{1+\sqrt{21}}{2} \\ m < \frac{1-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1-\sqrt{21}}{2} \\ m > \frac{1+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Câu 20: Đáp án C.

Hàm số đã cho xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}.$$

Để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ thì

$$\begin{cases} y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Câu 21: Đáp án B.

$$\text{Ta có: } y = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + 3x + 1; y' = mx^2 - 2mx + 3$$

+ Nếu $m = 0$ thì $y' = 3 > 0$ thỏa mãn.

+ Nếu $m \neq 0$ thì:

$$y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}. \text{ Điều này chứng tỏ}$$

$m > 0$ trong trường hợp này.

Vậy số nhỏ nhất để hàm đồng biến là $m = 0$.

Câu 22: Đáp án A.

$$\text{Ta có: } y = m \sin x + 7x - 5m + 3 \Rightarrow y' = m \cos x + 7.$$

Hàm số đồng biến khi $y' \geq 0 \Leftrightarrow |m| \leq 7$.

Câu 23: Đáp án B.

$$y = \frac{-1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-5)x - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y' = -x^2 + 2(m-1)x + 2m - 5$$

$$y' < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 + 2m - 5 \leq 0;$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$$

Câu 24: Đáp án A.

$$y = \frac{x+1}{x+m} \Rightarrow y' = \frac{m-1}{(x+m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$ khi:

$$\begin{cases} -m \notin (2; +\infty) \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 1$$

Câu 25: Đáp án B.

$$y = mx + (m+1)\sqrt{x-2} + 1 \Rightarrow y' = m + (m+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$y' \leq 0; \forall x \geq 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} y' \leq 0 \Rightarrow m+1 \leq 0 \Rightarrow m \leq -1$$

Với $m \leq -1$ dễ thấy hàm số nghịch biến.

Câu 26: Đáp án A.

Ta có: $ad - bc = m(m-3) + 2 = m^2 - 3m + 2$

Để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó thì $m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Câu 27: Đáp án C.

Ta có $ad - bc = m(m-4) + 3 = m^2 - 4m + 3$

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $ad - bc < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$.

Câu 28: Đáp án D.

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = 2$ là hàm hằng nên loại $m = 0$

TH2: $m \neq 0$. Ta có: $y' = 3mx^2 + 3mx + m(m-1)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m^2(m-1) \leq 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{4}{3} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}$$

Câu 29: Đáp án C.

Cách 1: Xét hàm số ...

Đặt $t = 3^{-x}$ nên $t \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thì hàm số đã cho trở

$$\text{thành: } y = \frac{t-3}{t-m}; y' = \frac{-m+3}{(t-m)^2}$$

Do hàm $t = 3^{-x}$ nghịch biến trên $(-1; 1)$

Để hàm số $y = \frac{3^{-x}-3}{3^{-x}-m}$ nghịch biến trên $(-1; 1)$ thì

$$y = \frac{t-3}{t-m} \text{ phải đồng biến trên } \left(\frac{1}{3}; 3\right)$$

$$\text{Nên } m < 3 \text{ và } m \notin \left(\frac{1}{3}; 3\right) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}$$

Cách 2: CASIO

MODE 7

$$y = (3^{-x} - 3):(3^{-x} - 4), \text{ START } -1, \text{ END } 1, \text{ STEP } 0,1$$

Nhìn bảng giá trị thấy hàm số tăng nên $m = 4$ sai, loại D.

$$y' = (3^{-x} - 3):(3^{-x} - 2), \text{ START } -1, \text{ END } 1, \text{ STEP } 0,1$$

Nhìn bảng giá trị thấy hàm số có tăng có giảm nên $m = 2$ sai, loại B.

$$y = (3^{-x} - 3):\left(3^{-x} - \frac{1}{3}\right), \text{ START } -1, \text{ END } 1, \text{ STEP } 0,1$$

Nhìn bảng giá trị thấy hàm số có giảm nên $m = \frac{1}{3}$ đúng, nhận C.

Xét hàm số $f(x) = g(u(x))$ trên I (với I là khoảng (đoạn), nửa khoảng). Đặt $u(x) = t; t \in K$ (với K là một khoảng (đoạn), nửa khoảng được tính chặt chẽ theo điều kiện của x).

1. Nếu $u(x)$ là hàm số đồng biến trên I thì hàm số thu được sau khi đặt ẩn phụ hay chính là hàm $g(t)$ cùng tính đơn điệu trên K với hàm số ban đầu.
2. Nếu $u(x)$ là hàm số nghịch biến trên I thì hàm số thu được sau khi đặt ẩn phụ hay chính là hàm $g(t)$ ngược tính đơn điệu trên K với hàm số ban đầu.

Câu 30: Đáp án C.

$$\text{Ta có } y = f(x) = \frac{m-2\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{m-2\sin x}{2-\sin^2 x}.$$

Đặt $t = \sin x$, do $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ nên $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Khi đó

$$\text{hàm số có dạng: } g(t) = \frac{m-2t}{2-t^2}.$$

$$\text{Đạo hàm } g'(t) = \frac{-2t^2 + 2mt - 4}{(2-t^2)^2}. \text{ Hàm số } f(x)$$

nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ khi hàm số $g(t)$ nghịch

$$\text{biến trên } \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow g'(t) \leq 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -2t^2 + 2mt - 4 \leq 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow m \leq t + \frac{2}{t}, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) (*)$$

Xét hàm số $h(t) = t + \frac{2}{t}$ trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

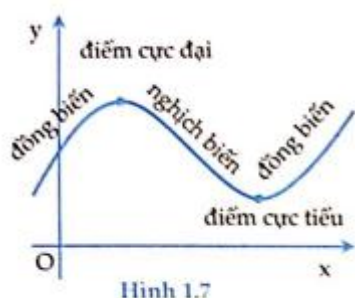
$$\text{Có } h'(t) = 1 - \frac{2}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Khi đó (*)

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

II. Cực trị của hàm số và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

A. Lý thuyết về cực trị của hàm số



Ở phần I.1 ta vừa học cách sử dụng đạo hàm để tìm khoảng đơn điệu của hàm số. Ở phần này ta sẽ xác định điểm nằm giữa khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số, và ngược lại. Những điểm này được gọi là **điểm cực trị** của đồ thị hàm số. Điểm cực trị bao gồm cả **điểm cực đại** và **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số. Đồ thị hàm số ở hình 1.7 có điểm cực đại là điểm phía bên trái và điểm cực tiểu ở phía bên phải (điểm được đánh dấu).

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

a, Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .

b, Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

Với hàm liên tục thì hàm số sẽ đạt cực trị tại điểm làm cho $y' = 0$ hoặc y' không xác định được thể hiện ở hình 1.8



Hình 1.8

Nếu hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu tại $x = c$ thì $x = c$ là điểm làm cho y' bằng 0 hoặc y' không xác định.

2. Chú ý

1. Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** (**giá trị cực tiểu**) của hàm số, kí hiệu f_{CD} (f_{CT}), còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** (**điểm cực tiểu**) của đồ thị hàm số.

2. Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại** (**cực tiểu**) và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

3. Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

STUDY TIP

Điểm cực trị của hàm số là $x = c$; còn điểm cực trị của đồ thị hàm số là điểm có tọa độ $M(c; f(c))$.

Chú ý

Trong các bài trắc nghiệm thường có các câu hỏi đưa ra để đánh lừa thí sinh khi phải phân biệt giữa **điểm cực trị của hàm số** và **điểm cực trị của đồ thị hàm số**.

STUDY TIP

Ở định lý 1 ta có thể hiểu như sau:

- Khi $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua $x=c$ thì $x=c$ được gọi là điểm cực đại của hàm số.
- Khi $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=c$ thì $x=c$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

STUDY TIP

Nếu $x=c$ là điểm cực trị của hàm $y=f(x)$ thì $f'(c)=0$ hoặc $f'(c)$ không xác định, nhưng nếu $f'(c)=0$ thì chưa chắc $x=c$ đã là điểm cực trị của hàm số.

3. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

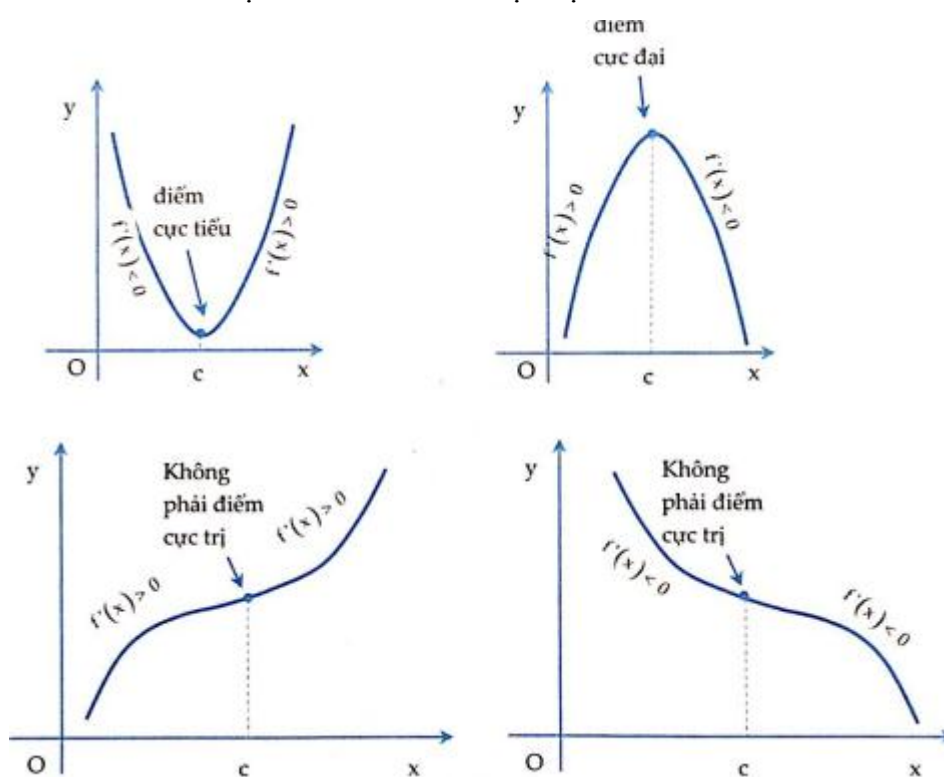
Ta thừa nhận định lý sau đây

Định lý 1

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $K=(x_0-h; x_0+h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h>0$.

- Nếu $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0-h; x_0)$ và $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0; x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0-h; x_0)$ và $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0; x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Hình 1.9 mô tả điều kiện đủ để hàm số có cực trị:



Hình 1.9

4. Quy tắc để tìm cực trị

Quy tắc 1

- Tìm tập xác định.
- Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định.
- Lập bảng biến thiên.
- Từ bảng biến thiên suy ra cực trị.

Quy tắc 2

- Tìm tập xác định.

2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ là các nghiệm của nó.
3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i), (i = 1; 2; 3; \dots, n)$.
4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .
 Nếu $f''(x_i) > 0$ thì x_i là điểm cực tiểu.
 Nếu $f''(x_i) < 0$ thì x_i là điểm cực đại.

B. Các dạng toán liên quan đến cực trị

Dạng 1

Xác định điểm cực trị của hàm số, điểm cực trị của đồ thị hàm số, tìm giá trị cực trị của hàm số

Phương pháp chung

Sử dụng hai quy tắc 1 và quy tắc 2 ở phần lý thuyết.

Ví dụ 1: Điểm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$ là

A. $x = -1; x = 3$

B. $x = -\frac{22}{3}; x = \frac{10}{3}$

C. $x = -1; x = 5$

D. $x = 4; x = 3$

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$

Có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = x^2 - 2x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

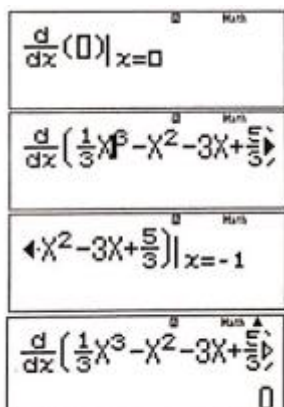
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{10}{3}$	$\searrow -\frac{22}{3}$	$\nearrow +\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có điểm cực đại $x = -1$ và điểm cực tiểu $x = 3$.

Cách 2: Sử dụng MTCT.

Ta sẽ sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm của máy tính.

Ấn **SHIFT** **($\int \frac{d}{dx}$)** thì máy hiện như hình bên.



Chú ý

Trong STUDY TIP trang 35 có chú ý rằng $y'(c)=0$ thì $x=c$ chưa chắc đã là điểm cực trị của hàm số, do vậy ta cần thử xem y' có đổi dấu qua $x=c$ hay không.

Nhập hàm số $\frac{1}{3}X^3 - X^2 - 3X + \frac{5}{3}$ tại giá trị $X = -1$ (Ta lần lượt thử các phương án).

Tại $x = -1$ thì $y' = 0$ suy ra $x = -1$ là một điểm cực trị của hàm số.

Tương tự ta giữ nguyên màn hình và thay $x = -1$ thành $x = 3$ thì được kết quả tương tự. Từ đó ta chọn A.

Ví dụ 2: Điểm cực trị của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ là

A. $x = -1; x = -3$

B. $x = 1; x = -3$

C. $x = 0; x = 1$

D. hàm số không có điểm cực trị

Đáp án D.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có BBT:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

Từ BBT suy ra hàm số không có cực trị.

Từ ví dụ 1 và ví dụ 2 ta nhận thấy với hàm số bậc ba có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ thì khi tìm cực trị của hàm số ta nên giải bằng cách 1 (xét phương trình $y' = 0$ thay vì sử dụng máy tính bởi phương trình $y' = 0$ là phương trình bậc hai giải quyết nhanh chóng hơn việc bấm máy thử trường hợp, tham khảo STUDY TIP bên cạnh để suy luận nhanh trong bài toán này.

Ví dụ 3: Xét hai hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ và hàm số $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{5}{4}$.

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại là $A(1; 2)$ và $B(-1; 2)$.

B. Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 0$ và hàm số $g(x)$ có giá trị cực đại là $y = \frac{5}{4}$.

C. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại, hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

D. Hàm số $f(x)$ và hàm số $g(x)$ cùng có điểm cực tiểu là $x = 0$.

Đáp án B.

STUDY TIP

Xét hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $(a \neq 0)$ có

$$\Delta_{y'} = b^2 - 3ac$$

* Nếu $b^2 - 3ac > 0$ thì hàm số có hai cực trị

* Nếu $b^2 - 3ac \leq 0$ thì hàm số không có cực trị.

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Lời giải

Từ bài toán xét sự biến thiên tổng quát của hàm số bậc bốn trùng phương mà tôi đã giới thiệu ở trang 21 và trang 22 trước đó thì ta có:

Hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ có $\frac{b}{a} = -2 < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có ba

$$\text{nghiệm phân biệt là } \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{-\frac{b}{2a}} = -1 \\ x = \sqrt{-\frac{b}{2a}} = 1 \end{cases}$$

Kết hợp với STUDY TIP trang 22 thì ta có $f(x)$ có hệ số $a = -1 < 0$ ta có nhanh bảng biến thiên

* Từ đây ta loại C do hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

* Ta loại A do hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại là $x = -1$ và $x = 1$. Còn $A(-1; 2)$ và $B(1; 2)$ là hai điểm cực đại của đồ thị hàm số, chứ không phải của hàm số (xem lại chú ý đầu tiên (phần mở đầu chủ đề cực trị của hàm số) về phân biệt các khái niệm).

* Để loại một trong hai phương án B và D còn lại ta tiếp tục xét hàm số $g(x)$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -x^3 - 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$-\infty$

Từ BBT ta loại D do $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số $g(x)$. Vậy ta chọn B.

Đối với hàm bậc bốn trùng phương dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

STUDY TIP

Đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng

$$y = ax^4 + bx^2 + c,$$

($a \neq 0$) thì nếu:

$ab \geq 0$ thì hàm số có một điểm cực trị là $x = 0$.

$ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là

$$x = 0; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}}$$

$$\text{Ta có } y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2 + b = 0$.

a. Nếu $\frac{b}{2a} < 0$ (tức a, b trái dấu) thì hàm số có ba điểm cực trị là

$$x = 0; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

b. Nếu $\frac{b}{2a} \leq 0$ (tức a, b cùng dấu hoặc $b = 0$ thì hàm số có duy nhất một điểm cực trị là $x = 0$.

Tiếp tục là một bài toán áp dụng kết quả vừa thu được.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có một cực đại và hai cực tiểu.
- B. Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu.
- C. Hàm số có một cực đại và không có cực tiểu.
- D. Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

Đáp án B.

Lời giải

Áp dụng kết quả vừa thu được ta có kết luận hàm số luôn có ba điểm cực trị do hai hệ số a, b trái dấu.

Mặt khác hệ số $a = -1 < 0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ **M** (mẹo nhớ), do vậy hàm số có hai điểm cực đại và một cực tiểu.

Đến đây ta tiếp tục thu được kết luận ở phần STUDY TIP.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- B. Hàm số có giá trị cực đại là $y = 25$ và giá trị cực tiểu là $y = -2$.
- C. Hàm số có duy nhất một điểm cực trị $x = -2$ là điểm cực đại.
- D. Đồ thị hàm số đã cho có một điểm cực tiểu là $A(-2; 25)$.

Đáp án C.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có } y' = -4x^3 + 12x - 8; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

BBT

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
-----	-----------	------	-----	-----------

Từ ví dụ 5 ta thấy đạo hàm bằng 0 tại $x = 1$ nhưng qua điểm này y' không đổi dấu nên điểm $x = 1$ không phải là

$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$					

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$. Từ đây ta chọn C.

Nhận xét: Đối với hàm bậc 4, vì đạo hàm là đa thức bậc 3 nên hàm chỉ có thể có một cực trị hoặc ba cực trị. Hàm số có một cực trị khi phương trình $y' = 0$ có một nghiệm hoặc 2 nghiệm (1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép), hàm số có 3 cực trị khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ và có bảng biến thiên phía dưới:

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 4$.
- B. Hàm số có đúng một cực trị.
- C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
- D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng -15 .

Đáp án C.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$		
y'	-	0	+	+	0	-	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$		
				$-\infty$	$\nearrow$	-15	
						$\searrow$	$-\infty$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = -4x^3 + 12x - 8$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy có hai giá trị của x mà qua đó y' đổi dấu, đó là $x = 0$ và $x = 4$, do vậy đây là hai điểm cực trị của hàm số.

Ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 0$, do vậy $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số, ngược lại $x = 4$ lại là điểm cực đại của hàm số.

Từ đây ta loại được A, B.

D sai do đây là các giá trị cực trị, không phải giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Ta chọn C bởi tại $x = 0$ thì hàm số có giá trị cực tiểu là $y = 1$.

Ví dụ 7: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-3)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
- B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.
- C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
- D. Hàm số đã cho không giá trị cực tiểu.

Đáp án A.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy có hai giá trị của x mà khi qua đó y' đổi dấu.

Do vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị đó là $x=1; x=2$.

Chú ý: Nhiều độc giả nghĩ rằng tại $x=2$ không tồn tại y' thì $x=2$ không phải là điểm cực trị của hàm số, đây là một sai lầm rất lớn. Bởi hàm số vẫn đạt cực trị tại điểm khiến cho đạo hàm không xác định.

Ví dụ: Hàm số $y = |x|$ có đạo hàm không tồn tại khi $x=0$ nhưng đạt cực tiểu tại $x=0$.

Ví dụ 8: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-3)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số có một điểm cực đại.
- B. Hàm số có hai điểm cực trị.
- C. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.
- D. Hàm số không có điểm cực trị.

Đáp án C.

Lời giải

$$\text{Ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Đến đây có nhiều độc giả kết luận luôn hàm số có hai điểm cực trị, tuy nhiên đó là kết luận sai lầm, bởi khi qua $x=1$ thì $f'(x)$ không đổi dấu, bởi $(x-1)^2 \geq 0, \forall x$.

Do vậy hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị là $x=3$.

STUDY TIP

Ở quy tắc 1 ta có hàm số đạt cực trị tại điểm khiến cho đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

STUDY TIP

Trong đa thức, dấu của đa thức chỉ đổi khi qua nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ, còn nghiệm bội chẵn không khiến đa thức đổi dấu.

Ví dụ 9: Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y = x^3 - 3x + 1$

B. $y = \frac{2-x}{x+3}$

C. $y = x^4 - 4x^3 + 3x + 1$

D. $y = x^{2n} + 2017x \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

STUDY TIP

1. Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất không có cực trị.

2. Hàm bậc bốn luôn luôn có cực trị (có ba cực trị hoặc có duy nhất một cực trị).

Đáp án B.

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Lời giải

Với A: Ta thấy đây là hàm bậc ba có $y' = 3x^2 - 3$, phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt nên hàm số có hai điểm cực trị (loại).

Với B: Đây là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên không có cực trị. Do đó ta chọn B.

Với C: Từ các kết quả về hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$ thì ta có kết luận rằng hàm số bậc bốn trùng phương luôn có điểm cực trị (do đồ thị hoặc dạng **M**; dạng **W** hoặc parabol).

Với D: Ta có $y' = 2nx^{2n-1} + 2017$ (phương trình luôn có nghiệm).

Ví dụ 10: Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

A. $y = x^4 + 2x^2 + 10$

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

C. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 2$

D. $y = 2x^4 - 4$

Đáp án B.

Lời giải

Ta có thể loại luôn C bởi hàm số bậc ba chỉ có nhiều nhất là hai cực trị.

Tiếp theo ta đến với các hàm bậc bốn. Ta có hàm bậc bốn trùng phương có hai trường hợp, hoặc là có một điểm cực trị, hoặc là có ba điểm cực trị.

Đến đây ta có thể suy ra, nếu hệ số a, b khác dấu thì hàm số bậc bốn trùng phương có ba cực trị, do vậy ta chọn luôn được B.

Dạng 2

Tìm điều kiện để hàm số đã cho có điểm cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

2.1 Xét hàm số bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

Chú ý:

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D có cực trị $\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

- i. Đạo hàm của hàm số tại x_0 phải bằng 0 hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0
- ii. $f'(x)$ phải đổi dấu qua x_0 hoặc $f''(x_0) \neq 0$.

Một số lưu ý đối với cực trị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

- Để hàm số bậc ba có cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$$

- Ngược lại, để hàm số không có cực trị thì phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$

- Hoành độ $x_1; x_2$ của các điểm cực trị là các nghiệm của phương trình $y' = 0$.

- Để viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba, ta thường sử dụng phương pháp tách đạo hàm (xem bài toán tổng quát ở phía dưới).

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, đồ thị hàm số bậc ba hoặc là có hai điểm cực trị, hoặc là không có điểm cực trị nào.

Một số bài toán thường gặp:

Bài toán tổng quát 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$. Tìm điều kiện để:

- a.** Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu (hay hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ trái dấu).
- b.** Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu (hay hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ cùng dấu).
- c.** Hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1; x = x_2$ so sánh với số thực α .
- d.** Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị (điểm cực đại và điểm cực tiểu) nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng).

Lời giải tổng quát

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; phương trình $3ax^2 + 2bx + c = 0$ có $\Delta' = b^2 - 3ac$

- a.** Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.

Chú ý

Phương trình $y' = 0$ ta xét ở đây có các hệ số lần lượt là $3a$; $2b$; c do vậy trong tất cả các bài toán tổng quát về hàm số bậc ba trong sách ta đều xét các hệ số này.

Ví dụ $\Delta' = b^2 - 3ac$ (ở đây $2b$; $3a$; c lần lượt là các hệ số của $y' = 0$ khác với biệt số delta $b^2 - 4ac$ tổng quát mà ta vẫn ghi nhớ.

b. Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng

$$\text{dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases}$$

c. Điều kiện để hàm số có 2 cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$* x_1 < \alpha < x_2$$

$$* x_1 < x_2 < \alpha$$

$$* \alpha < x_1 < x_2$$

(tham khảo bảng trang 28; 29).

d. Điều kiện để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía với một đường thẳng $\Delta: mx + ny + k = 0$

Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

* Nếu $(mx_1 + ny_1 + k)(mx_2 + ny_2 + k) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với Δ .

* Nếu $(mx_1 + ny_1 + k)(mx_2 + ny_2 + k) < 0$ thì A, B nằm khác phía so với Δ .

Một số trường hợp đặc biệt

- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba nằm cùng phía so với trục $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba nằm về hai phía đối với trục $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng phía với trục $Ox \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía với trục $Ox \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cùng nằm về một phía trên đối với trục $Ox \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} > 0 \end{cases}$
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng phía dưới với trục $Ox \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} < 0 \end{cases}$

Bài toán tổng quát 2: Viết phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

Lời giải tổng quát

Giả sử hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có hai điểm cực trị là $x_1; x_2$. Khi đó thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được

$$f(x) = Q(x) \cdot f'(x) + Ax + B.$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} f(x_1) = Ax_1 + B \\ f(x_2) = Ax_2 + B \end{cases} \quad (\text{Do } f'(x_1) = f'(x_2) = 0).$$

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = Ax + B$.

STUDY TIP

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba biểu diễn theo $y'; y''; y$ là

$$\Rightarrow g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$$

Đến đây ta quay trở về với bài toán 1, vậy nhiệm vụ của chúng ta là đi tìm số dư đó một cách tổng quát.

$$\text{Ta có } y' = 3ax^2 + 2bx + c; y'' = 6ax + 2b.$$

Xét phép chia y cho y' thì ta được:

$$y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{b}{9a} \right) + g(x) \quad (*), \text{ ở đây } g(x) \text{ là phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba.}$$

$$\text{Tiếp tục ta có } (*) \Leftrightarrow y = y' \cdot \frac{3ax + b}{9a} + g(x) \Leftrightarrow y = y' \cdot \frac{6ax + 2b}{18a} + g(x)$$

$$\Leftrightarrow y = y' \cdot \frac{y''}{18a} + g(x) \quad \Rightarrow g(x) = y - \frac{y' \cdot y''}{18a}$$

Một công thức khác về phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba là:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$. Sau khi thực hiện phép chia tổng quát thì ta rút ra được công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba theo a, b, c, d là $y = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right)x + d - \frac{bc}{9a}$

Sau đây tôi xin giới thiệu một cách bấm máy tính để tìm nhanh phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba như sau:

Trước tiên ta xét ví dụ đơn giản:

Ví dụ 1: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ là:

A. $26x + 9y - 15 = 0$

B. $-25x + 9y - 15 = 0$

C. $26x - 9y + 15 = 0$

D. $25x - 9y + 15 = 0$

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Đáp án A.

Lời giải

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số xác định bởi:

$$g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 - (3x^2 + 4x - 3) \cdot \frac{6x + 4}{18}$$

Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức bằng cách nhập:

MODE **2:CMPLX**

Nhập vào máy tính biểu thức $g(x)$ như sau:

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 1 - (3X^2 + 4X - 3) \cdot \frac{6X + 4}{18}$$

Ấn **CALC**, gán X bằng I (ở máy tính i là nút **ENG**) khi đó máy hiện: $\frac{5}{3} - \frac{26}{9}i$.

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

$$y = \frac{5}{3} - \frac{26}{9}x \Leftrightarrow 26x + 9y - 15 = 0.$$

Tiếp theo ta có một bài tham số.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(1-m)x + 1 + 3m$, tìm m sao cho đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $m \geq 0; \Delta: 2mx + y - 2m - 2 = 0$ **B.** $m > 0; \Delta: 2mx + y - 2m - 2 = 0$

C. $m < 0; \Delta: y = 202 - 200x$ **D.** $m \geq 0; \Delta: y = 202 - 200x$

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3(1-m)$, $y'' = 6x - 6$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu thì $\Delta' = 3^2 - 9(1-m) > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Với $m > 0$ thì ta thực hiện:

Chuyển máy tính sang chế độ **MODE** **2:CMPLX**.

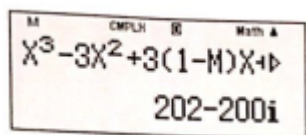
Nhập vào máy tính biểu thức $y - y' \cdot \frac{y''}{18a}$ ta có

Sử dụng máy tính

Sử dụng tính toán với số phức để giải quyết bài toán.

STUDY TIP

Với những dạng toán này, ta lưu ý rằng trước tiên, ta cần tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị.



$$X^3 - 3X^2 + 3(1-M)X + 1 + 3M - (3X^2 - 6X + 3(1-M)) \frac{6X - 6}{18}$$

Ấn **CALC**

Máy hiện X? nhập $i =$

Máy hiện M? nhập $100 =$

Khi đó máy hiện kết quả là $202 - 200i$

Ta thấy $202 - 200i = 2.100 + 2 - 2.100i \Rightarrow y = 2m + 2 - 2mx$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có dạng $2mx + y - 2m - 2 = 0$.

Ta rút ra kết luận về cách làm dạng toán viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba này như sau:

Bước 1: Xác định y' ; y'' .

Bước 2: Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức:

MODE **2:CMPLX**

Nhập biểu thức $y - y' \cdot \frac{y''}{18a}$

Chú ý:

Nếu bài toán không chứa tham số thì ta chỉ sử dụng biến X trong máy, tuy nhiên nếu bài toán có thêm tham số, ta có thể sử dụng các biến bất kì trong máy để biểu thị cho tham số đã cho, ở trong sách này ta quy ước biến M để dễ định hình.

Bước 3: Gán giá trị.

Ấn **CALC**, gán X với i , gán M với 100

Lúc này máy hiện kết quả, từ đó tách hệ số và i để đưa ra kết quả cuối cùng, giống như trong hai ví dụ trên.

Bài toán tổng quát 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$. Giả sử hàm số có hai điểm cực trị (một điểm cực đại, một điểm cực tiểu). Tìm khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Lời giải tổng quát

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$.

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Lúc này hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

Ta có $d = |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Áp dụng **bài toán tổng quát 2** ta có phương trình đi qua 2 điểm A; B là

59

STUDY TIP

Với bước cuối cùng, ta cần có kỹ năng khai triển đa thức sử dụng máy tính cầm tay, do khuôn khổ của sách nên tôi không thể giới thiệu vào sách, do vậy mong quý độc giả đọc thêm về phần này.

STUDY TIP

Cho hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$.

- Nếu $b^2 - 3ac > 0$ thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$d = 2\sqrt{\frac{4k^3 + k}{a}} \text{ với}$$

$$\Delta: y = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right) x + d - \frac{bc}{9a}$$

$$\text{Đặt } k = \frac{b^2 - 3ac}{9a} \Rightarrow \frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} = 2 \cdot \frac{3ac - b^2}{9a} \text{ thì } \Delta: y = -2kx + d - \frac{bc}{9a}.$$

$$\text{Lúc này ta có } AB^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + [-2k(x_1 - x_2)]^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = \left(\frac{-2b}{3a} \right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{3a} + 4k^2 \cdot \left[\left(\frac{-2b}{3a} \right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{3a} \right]$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = \frac{4b^2 - 12ac}{9a^2} + 4k^2 \cdot \frac{4b^2 - 12ac}{9a^2} \Leftrightarrow AB^2 = \frac{4(b^2 - 3ac)}{a \cdot 9a} (1 + 4k^2)$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = \frac{4}{a} \cdot k \cdot (1 + 4k^2) \Rightarrow AB = 2 \sqrt{\frac{4k^3 + k}{a}} \text{ với } k = \frac{b^2 - 3ac}{9a}.$$

Ví dụ 1: Giá trị của m để $(C_m): y = x^3 + x^2 + (m+1)x - m^3 + m$ để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị (C_m) bằng $\frac{2\sqrt{85}}{27}$ là

A. $m = -2$

B. $m = -1$

C. $m = -4$

D. $m = -3$

Đáp án B.

Lời giải

- Ta có $b^2 - 3ac = 1 - 3(m+1) = -3m - 2$. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị

$$\Leftrightarrow -3m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{3}$$

- Lúc này áp dụng công thức trong **bài toán tổng quát 3** thì ta có

$$2 \sqrt{\frac{4 \cdot \left(\frac{-3m-2}{9} \right)^3 - \frac{3m+2}{9}}{1}} = \frac{2\sqrt{85}}{27}. \text{ Đến đây ta có thể nhập phương trình vào máy}$$

tính và thử các giá trị của m trong 4 phương án, từ đó ta chọn được B thỏa mãn.

Trường hợp $m = -2$

Trường hợp $m = -1$

Cách bấm máy tính: Nhập vào màn hình $\sqrt{4 \left(\frac{-3X-2}{9} \right)^3 - \frac{3X+2}{9} - \frac{\sqrt{85}}{27}}$ (do có cùng thừa số chung là 2 nên ta bỏ 2 đi).

Thử với A: Ấn **CALC** **[-]** **2** **=** thì máy kết quả khác 0 nên ta loại A.

Thử với B: Tiếp tục ấn **CALC** **[-]** **1** **=** thì máy kết quả 0 nên ta chọn B.

Bài toán tổng quát 4: Định m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = kx + e$.

Lời giải tổng quát

STUDY TIP

Điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0$ và nằm trên đồ thị hàm số

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

Do đồ thị hàm bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng nên lúc này điểm uốn $I(x_I; y_I)$ sẽ thuộc d và đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số vuông

góc với d . Tức là m thỏa mãn hệ sau:
$$\begin{cases} y_I = kx_I + e \\ \frac{2}{3} \cdot \left(c - \frac{b^2}{3a} \right) \cdot k = -1 \end{cases}$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (với m là tham số) có đồ thị (C_m) . Tập tất cả các giá trị của m để hai điểm cực trị của đồ thị (C_m) đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$ là

- A. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ B. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ C. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right\}$ D. $\left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right\}$

Đáp án B.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$;

$y'' = 6x - 6m; y'' = 0 \Leftrightarrow x = m$. Lúc này điểm uốn I là điểm có tọa độ $(m; 2m^3)$.

Từ bài toán tổng quát ở trên ta có:

$$\begin{cases} 2m^3 = m \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{-(3m)^2}{3} \cdot 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 2: Xác định tất cả các giá trị của m để hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đối xứng nhau qua đường thẳng $x - 2y - 5 = 0$.

- A. $m = 0$ B. $m = -2$ C. $m \in \emptyset$ D. $m = 2$

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m; y'' = 6x - 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy điểm uốn $I(1; m - 2)$

Từ bài toán tổng quát ở trên ta có:

$$\begin{cases} 1 - 2 \cdot (m - 2) - 5 = 0 \\ \frac{2}{3} \cdot \left(m - \frac{3^2}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Một số ví dụ khác

Trên đây là bốn bài toán tổng quát đưa ra phương hướng công thức cụ thể cho các dạng bài hay gặp. Sau đây tôi xin đưa ra một số ví dụ khác không nằm trong 4 bài toán tổng quát trên, nhưng tuy nhiên các ví dụ dưới đây có chung một điểm là phương trình $y' = 0$ có thể tìm được rõ nghiệm $x_1; x_2$ theo tham số m .

Ví dụ 1: Giá trị của m để đồ thị $(C_m): y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho ba điểm $A; B; C(0; -1)$ thẳng hàng là

- A. $m = 3$ B. $m = 4$ C. $m = 1$ D. $m = -1$

Đáp án B.

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6(m-3)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 - m \end{cases}$$

Đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị A và B khi và chỉ khi $3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$

Áp dụng bài toán tổng quát số 2 thì ta có phương trình đi qua hai điểm cực trị $A; B$ là $AB: y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m$.

Để A, B, C thẳng hàng thì $C(0; -1) \in AB: y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m$

$$\Leftrightarrow -1 = 11 - 3m \Leftrightarrow m = 4 \text{ (thỏa mãn yêu cầu đề bài).}$$

Ví dụ 2: Tất cả các giá trị của m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ có hai điểm cực trị trong đó A là điểm cực đại, B là điểm cực tiểu sao cho $OA = \sqrt{2}OB$ là

- A. $m = 3 + 2\sqrt{2}$ B. $m = -2 - 3\sqrt{2}; m = -2 + 3\sqrt{2}$
C. $m = -3 - 2\sqrt{3}$ D. $m = -3 + 2\sqrt{2}; m = -3 - 2\sqrt{2}$

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $b^2 - 3ac = 9 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Suy ra đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Ta có $\Delta_{y'} = 9 \Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = m - 1; x_2 = m + 1 \Rightarrow x_1 < x_2$$

Vì hệ số $a = 1 > 0$ nên $x = x_1$ là điểm cực đại của hàm số và $x = x_2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

$$\Rightarrow A(m-1; 2-2m) \text{ và } B(m+1; -2-2m).$$

Theo đề ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow OA^2 = 2OB^2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn yêu cầu đề bài).}$$

Ví dụ 3: Giá trị của m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 3mx + 1$ có hai điểm cực trị B, C sao cho tam giác ABC cân tại A với $A(2; 3)$ là

STUDY TIP

Sở dĩ trong bài toán này ta kết luận được $x = x_1$ là điểm cực đại của hàm số và $x = x_2$ là điểm cực tiểu của hàm số bởi ta dựa vào cách nhận dạng đồ thị hàm bậc ba có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và hệ số a thì đồ thị dạng chữ N.

A. $m = 0; m = \frac{1}{2}$ B. $m = 1; m = 2$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = 2$

Đáp án C.

Lời giải

Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$. Khi đó tọa độ hai điểm cực trị B; C lần lượt là $B(-\sqrt{m}; 2\sqrt{m^3} + 1)$;

$$C(\sqrt{m}; -2\sqrt{m^3} + 1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (2\sqrt{m}; -4\sqrt{m^3})$$

Gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow I(0; 1)$.

$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -4\sqrt{m} + 8\sqrt{m^3} = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = \frac{1}{2}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Giá trị của m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 4m - 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho ΔOAB vuông tại A là

A. $m = -1; m = 2$ B. $m = 1; m = -2$ C. $m = 1; m = -1$ D. $m = -1; m = 0$

Đáp án A.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \Rightarrow y = m - 3 \\ x = m - 1 \Rightarrow y = m + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(m + 1; m - 3) \\ B(m - 1; m + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (m + 1; m - 3) \\ \overrightarrow{OB} = (m - 1; m + 1) \end{cases}$$

$$\text{Do tam giác } OAB \text{ vuông tại } O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = 2$ là các giá trị cần tìm.

STUDY TIP

Khi giải các bài toán chứa tham số ta nên chú ý xem phương trình $y' = 0$ có thể giải ra nghiệm được hay không. Ta có một số kết quả sau:

1. Tổng các hệ số của các số hạng trong phương trình bằng 0 thì phương trình có một nghiệm $x = 1$.

2. Tổng các hệ số bậc chẵn và các hệ số bậc lẻ của các số hạng trong phương trình bằng nhau thì phương trình có một nghiệm $x = -1$.

3. Lưu ý xét $b^2 - 3ac$ để giải nghiệm phương trình $y' = 0$ nhanh hơn.

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

2.2. Xét hàm số bậc bốn trùng phương có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$

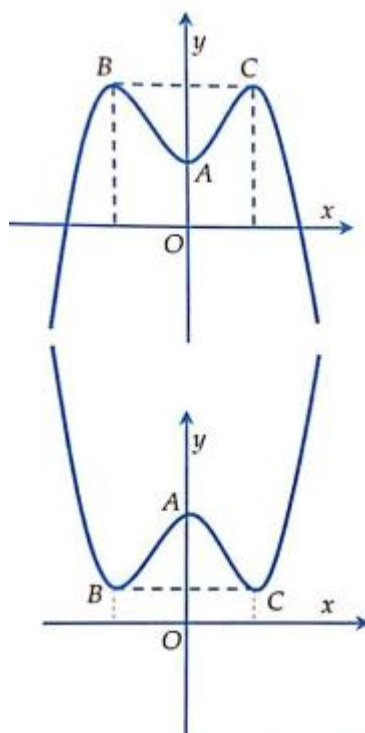
Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0 \end{cases}$

Đến đây ta có nhận xét hàm số **bậc bốn trùng phương luôn có điểm cực trị**.

Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2 + b = 0$.

a. Nếu $\frac{-b}{2a} \leq 0$ tức là a, b cùng dấu hoặc $b = 0$ thì phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 0$. Khi đó hàm số chỉ có một điểm cực trị là $x = 0$.

b. Nếu $\frac{-b}{2a} > 0$ tức là a, b trái dấu thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Nghĩa là hàm số có ba điểm cực trị là $x = 0; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$.



Ta vừa chứng minh ở trên, nếu $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là $x = 0;$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}.$$

Khi đó đồ thị hàm số đã cho sẽ có ba điểm cực trị là:

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac \text{ (Hình minh họa)}$$

(Chứng minh: ta có $f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) = a\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^4 + b\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2 + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$

$$= \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2} = \frac{-ab^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \text{ (đpcm))}$$

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân điều kiện là $\frac{b^3}{a} = -8$. Ta loại được điều kiện a, b trái dấu do từ công thức cuối cùng thu được thì ta luôn có a, b trái dấu.

Bài toán 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông.

Lời giải tổng quát

Với $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do điểm $A(0; c)$ luôn nằm trên Oy và cách đều hai điểm B, C. Nên tam giác ABC phải vuông cân tại A. Điều này tương đương với $AB \perp AC$ (do $AB = AC$ có sẵn rồi).

$$\text{Mặt khác ta có } \overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right); \overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$\text{Do } AB \perp AC \text{ nên } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{a} = -8$$

Ví dụ 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 8m^2x^2 + 3$ có 3 điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $\{0\}$

B. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

D. $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Lời giải thông thường.	Cách 2: Áp dụng công thức.
TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 4x(x^2 - 4m^2)$ Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$. Lúc đó, ba điểm cực trị là: $A(2m; -16m^4 + 3), B(0; 3), C(-2m; -16m^4 + 3)$ Nên $BA = BC$. Do đó, tam giác ABC cân tại B Khi đó, tam giác ABC vuông cân khi và chỉ khi: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 256m^8 = 0$ $\Leftrightarrow 1 - 64m^6 = 0 \ (m \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$	Để các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông cân thì $\frac{b^3}{a} = -8 \Leftrightarrow \frac{(-8m^2)^3}{1} = -8$ $\Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$

Nhận xét: Rõ ràng việc nhớ công thức và làm nhanh hơn rất nhiều so với việc suy ra từng trường hợp một.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông?

A. $m = 1$

B. $m = -1$

C. $m = 2$

D. $m = -2$

2. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5 \ (C_m)$. Giá trị nào của m để đồ thị của hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông cân thuộc khoảng nào sau đây?

STUDY TIP

Độc giả nên làm các bài tập rèn luyện này mà không nhìn lại công thức để có thể ghi nhớ công thức lâu hơn.

- A. $\left(\frac{4}{7}; \frac{3}{2}\right)$ B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{21}{10}\right)$ C. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ D. $(-1; 0)$

3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 + (m - 2015)x^2 + 2017$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

- A. $m = 2017$ B. $m = 2014$ C. $m = 2016$ D. $m = 2015$

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m + 2016)x^2 - 2017m + 2016$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

- A. $m = -2017$ B. $m = 2017$ C. $m = -2018$ D. $m = 2015$

5. Tìm m để đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$ có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông.

- A. $m = 2$ B. $m = -1$ C. $m = 0$ D. $m = 1$

Đáp án

1. A	2. A	3. A	4. A	5. C
------	------	------	------	------

Bài toán 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

Lời giải tổng quát

Với $ab < 0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do $AB = AC$, nên ta chỉ cần tìm điều kiện để $AB = BC$.

Mặt khác ta có

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

$$\text{Do vậy } AB = BC \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = -\frac{2b}{a} \Leftrightarrow \frac{b^3}{a} = -24$$

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều. Ta có kết

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều thì $\frac{b^3}{a} = -24$.

quả:

A. $m = 3$

B. $m = 0$

C. $m > 0$

D. $m = \sqrt[3]{3}$

Đáp án D.

Lời giải

Áp dụng công thức vừa chứng minh ở trên ta có

$$\frac{b^3}{a} = -24 \Leftrightarrow \frac{(-2m)^3}{1} = -24 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$$

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m). Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều?

A. $m = 2 - \sqrt[3]{3}$

B. $m = 2 + \sqrt[3]{3}$

C. $m = 5 - 2\sqrt[3]{3}$

D. $m = 5 + 2\sqrt[3]{3}$

2. Cho hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-2017)x^2 - 2016$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều?

A. $m = 2015$

B. $m = 2016$

C. $m = 2017$

D. $m = -2017$

3. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều?

A. $m = \sqrt[3]{3}$

B. $m = -\sqrt[3]{3}$

C. $m = \sqrt{3}$

D. $m = -\sqrt{3}$

4. Cho hàm số $y = -mx^4 + 2mx^2 - m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

A. $m = \sqrt{3}; m = -\sqrt{3}; m = 0$

B. $m = -\sqrt{3}; m = \sqrt{3}$

C. $m = 0$

D. $m = \sqrt{3}$

Đáp án

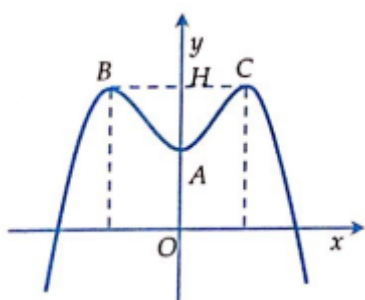
1A	2B	3A	4B
----	----	----	----

Bài toán 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng S_0 .

Lời giải tổng quát

Gọi H là trung điểm của BC thì lúc này H nằm trên đường thẳng chứa đoạn thẳng BC (hình vẽ).

Lúc này $H\left(0; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(0; -\frac{b^2}{4a}\right)$. Diện tích tam giác ABC được tính



$$\text{bằng công thức: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \Rightarrow S_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{b^2}{4a}\right)^2 \cdot \left(2\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow S_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^4}{16a^2} \cdot \frac{-2b}{a} \Leftrightarrow S_0^2 = \frac{-b^5}{32a^3}$$

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số

$$y = ax^4 + bx^2 + c,$$

($a \neq 0$) có ba điểm cực

trị tạo thành tam giác có

diện tích là S_0 thì có

điều kiện là

$$S_0^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4

A. $m = \sqrt[5]{16}$

B. $m = 16$

C. $m = \sqrt[3]{16}$

D. $m = -\sqrt[3]{16}$

Đáp án A.

Lời giải

Áp dụng công thức ở trên ta có, hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4 $\Leftrightarrow 32 \cdot a^3 S_0^2 + b^5 = 0 \Leftrightarrow 32 \cdot 1^3 \cdot 4^2 + (-2m)^5 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{16}$.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

A. $m = 2; m = -2$

B. $m = 0; m = 2$

C. $m = 0; m = -2$

D. $m = 2; m = -2; m = 0$

2. Cho hàm số $y = f(x) = -x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m = 3$

B. $m = \pm 3$

C. $m = 2$

D. $m = \pm 2$

3. Cho hàm số $y = 3x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

A. $m = 3$

B. $m = -3$

C. $m = 4$

D. $m = -4$

4. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - m - 1$ (1), với m là tham số thực. Xác định m để hàm số (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

A. $m = 2$

B. $m = -2$

C. $m = 4$

D. $m = -4$

Đáp án

1A	2A	3A	4B
----	----	----	----

Bài toán 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

Lời giải tổng quát

Ở bài toán 3 ta có $S_0^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$.

Do vậy ta chỉ đi tìm $\text{Max}\left(\frac{-b^5}{32a^3}\right)$

Bài toán 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị $A; B; C$ tạo thành tam giác ABC trong đó $B; C \in Ox$.

Lời giải tổng quát

Tam giác ABC có hai điểm cực trị $B; C \in Ox \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$

Bài toán 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị $A; B; C$ tạo thành tam giác ABC trong đó $BC = kAB = kAC; (k > 0)$.

Lời giải tổng quát

Từ bài toán tổng quát ban đầu ta có $A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}.$$

$$\text{Ta có } BC = kAB \Leftrightarrow 2\sqrt{-\frac{b}{2a}} = k\sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}} \Leftrightarrow b^3k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$$

Bài toán 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có góc ở đỉnh cân bằng α .

Lời giải tổng quát

Cách 1:

Ta có

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có góc ở đỉnh là α thì có điều kiện là

$$\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - AB^2 \cdot \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \left(-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} \right) \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow 8a + b^3 + (8a - b^3) \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$$

Cách 2:

Gọi H là trung điểm của BC , tam giác AHC vuông tại H có:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{HC}{AH} = \frac{BC}{2AH} \Rightarrow BC^2 - 4 \cdot AH^2 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow 8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$$

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có ba góc nhọn thì $b \cdot (b^3 + 8a) > 0$

Bài toán 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có ba góc nhọn.

Lời giải tổng quát

Do tam giác ABC là tam giác cân nên hai góc ở đáy bằng nhau. Một tam giác không thể có hai góc tù, do vậy hai góc ở đáy của tam giác ABC luôn là góc nhọn. Vì thế cho nên để tam giác ABC là tam giác có ba góc nhọn thì góc ở đỉnh phải là góc nhọn. Tức là tìm điều kiện để $BAC = \alpha$ là góc nhọn.

Ở bài toán trên ta vừa tìm được $\cos BAC = \cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$.

Để góc BAC nhọn thì $\frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} > 0$

Cách khác để rút gọn công thức:

Do $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$ nên để α là góc nhọn thì $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} > 0$.

Mà $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| > 0$ do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} > 0 \Leftrightarrow b \cdot (b^3 + 8a) > 0$

Bài toán 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là r .

Lời giải tổng quát

Ta có $S_0 = p \cdot r$ (công thức tính diện tích tam giác theo bán kính đường tròn nội tiếp).

$$\Rightarrow r = \frac{2S_0}{AB + AC + BC} = \frac{2\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}}{2\sqrt{-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}} + 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}} \Leftrightarrow r = \frac{b^2}{4|a| \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$$

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**

Bài toán 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R .

Lời giải tổng quát

Trước tiên ta có các công thức sau: $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$

Gọi H là trung điểm của BC , khi đó AH là đường cao của tam giác ABC , nên

$$\frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Leftrightarrow 4R^2 \cdot AH^2 = AB^4$$

$$4R^2 \cdot \frac{b^4}{16a^2} = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} \right)^2 \Leftrightarrow R = \frac{b^3 - 8a}{8 \cdot |a| \cdot b}$$

Bài toán 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có

a. Có độ dài $BC = m_0$.

b. Có $AB = AC = n_0$.

Lời giải tổng quát

Ở ngay đầu **Dạng 3** ta đã có các công thức

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

Do vậy ở đây với các ý a, b ta chỉ cần sử dụng hai công thức này. Đây là hai công thức quan trọng, việc nhớ công thức để áp dụng là điều cần thiết.

Bài toán 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác.

a. nhận gốc tọa độ O là trọng tâm.

b. nhận gốc tọa độ O làm trục tâm.

c. nhận gốc tọa độ O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

Lời giải tổng quát

a. Nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

a. Ở công thức vừa nhắc lại ở bài toán 9, ta có tọa độ các điểm A, B, C thì chỉ cần áp dụng công thức $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$ (với G là trọng tâm

STUDY TIP

Với những dạng toán này, ta lưu ý ta luôn có tam giác ABC cân tại A , nên ta chỉ cần tìm một điều kiện là có đáp án của bài toán.

tam giác ABC).

$$\text{Lúc này ta có } \begin{cases} 0 + \left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right) + \sqrt{-\frac{b}{2a}} = 3.0 \\ c + \left(-\frac{b^2}{4a}\right) + c + \left(-\frac{b^2}{4a}\right) + c = 3.0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{b^2}{2a} + 3c = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 6ac = 0$$

b. Nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

Do tam giác ABC cân tại A , mà A nằm trên trục Oy nên AO luôn vuông góc với BC . Do vậy để O là trực tâm của tam giác ABC thì ta chỉ cần tìm điều kiện để $OB \perp AC$ hoặc $OC \perp AB$.

$$OB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b^2c}{4a} = 0 \Leftrightarrow b^4 + 8ab - 4ab^2c = 0$$

$$\Leftrightarrow b^3 + 8a - 4abc = 0$$

c. Nhận O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

Để tam giác ABC nhận tâm O làm tâm đường tròn ngoại tiếp thì $OA = OB = OC$. Mà ta luôn có $OB = OC$, do vậy ta chỉ cần tìm điều kiện cho

$$OA = OB \Leftrightarrow c^2 = -\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \frac{2b^2c}{4a} + c^2 \Leftrightarrow b^4 - 8ab^2c - 8ab = 0$$

$$\Leftrightarrow b^3 - 8a - 8abc = 0$$

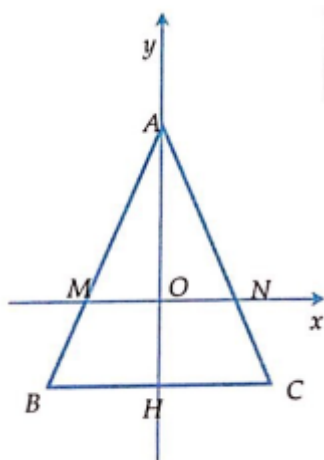
Bài toán 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải tổng quát

Gọi M, N là giao điểm của AB, AC với trục hoành, kí hiệu như hình vẽ

Ta có $\triangle ANM \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{OA}{AH}\right)^2 = \frac{1}{2}$ (Do trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau).

$$\Rightarrow AH = \sqrt{2}OA \Leftrightarrow b^2 = 4\sqrt{2}|ac|$$



2.3. Xét hàm phân thức.

Trước tiên ta xét bài toán liên quan đến cực trị hàm phân thức nói chung. Ta có một kết quả khá quan trọng như sau:

Xét hàm số dạng $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ xác định trên D

$$\text{thì ta có } f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Điểm cực trị của hàm số này là nghiệm của phương trình

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

STUDY TIP

Lưu ý công thức

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)}{v'(x)} \text{ để giải}$$

quyết bài toán một cách nhanh gọn hơn.

Nhận xét: Biểu thức trên được thỏa mãn bởi các giá trị là cực trị của hàm số đã cho. Do đó, thay vì tính trực tiếp tung độ của các điểm cực trị, ta chỉ cần thay vào biểu thức đơn giản hơn sau khi đã lấy đạo hàm cả tử lẫn mẫu. Vận dụng tính chất này, ta giải quyết được nhiều bài toán liên quan đến điểm cực trị của hàm phân thức.

Ví dụ: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$, $a \neq 0, a' \neq 0$.

Theo công thức vừa nêu ở trên thì ta lần lượt tìm biểu thức đạo hàm của tử số và mẫu số.

Suy ra $y = \frac{2ax + b}{a'}$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu có)

của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$, $a \neq 0, a' \neq 0$.

Đây là trích đoạn một phần rất nhỏ của bộ công phá toán 3 (chương trình 12) gồm 700 trang có trình bày rõ nét đầy đủ các dạng mình có tất cả 3 cuốn công phá 1 + 2 và 3 Thầy cô nào cần file word thì liên hệ với mình qua Zalo **0988 166 193**



Đọc thêm:

Phương pháp sử dụng máy tính cầm tay để giải nhanh các bài tập định tham số m để hàm $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0

Cách 1: Sử dụng TABLE

Cách làm: Ta sử dụng tính năng bảng giá trị TABLE của máy tính để nghiên cứu nhanh dáng điệu của đồ thị trên đoạn $(x_0 - 0,5; x_0 + 0,5)$ với 4 giá trị tham số mà đề cho.

Ta lần lượt gán 4 giá trị ở phần đáp án cho A, B, C, D bằng lệnh gán giá trị SHIFT STO.

Do chức năng TABLE của máy tính cầm tay Fx 570 VN Plus có thể chạy được 2 hàm số $f(x)$ và $g(x)$ nên một lần thử ta thử được 2 phương án. Do vậy, cả bài toán ta chỉ cần thử hai lần.

Ví dụ 1: Với giá trị nào của tham số thực m thì hàm số

$$y = \frac{x^3}{3} - 2mx^2 + 3m^2x - 3m$$

đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $m = -1$

B. $m = 1$

C. $m = \frac{1}{3}$

D. $m = -\frac{1}{3}$

Đáp án A.

Lời giải

Lần lượt gán 4 giá trị của m ở 4 phương án A, B, C, D cho các biến A, B, C, D trên máy bằng lệnh SHIFT STO như sau:

Ấn -1 SHIFT RCL (STO) = A.

Tương tự với các phương án còn lại.

Ấn MODE 7: TABLE

Nhập hàm $f(x) = \frac{X^3}{3} - 2AX^2 + 3A^2X - 3A$. (là hàm số đã cho khi $m = -1$ ở phương án A). Sau đó ấn =, máy hiện $g(x) =$ ta nhập

$$g(x) = \frac{X^3}{3} - 2BX^2 + 3B^2X - 3B \text{ ấn } =$$

Start? Chọn -1-0,5

End? Chọn -1+0,5

STEP? Chọn 0.1

Máy sẽ hiện bảng giá trị của hàm số đã cho trong hai trường hợp ở phương án A và B như sau:

STUDY TIP

Ở bài dạng này, ta chỉ cần để ý xem giá trị của hàm số thay đổi như thế nào khi qua $x = x_0$.

X	F(X)	G(X)
1	-1.125	-1.125
2	-0.914	-0.914
3	-0.732	-0.732
		-1.5

X	F(X)	G(X)
4	-0.576	-0.576
5	-0.443	-0.443
6	-0.333	-0.333
		-1

X	F(X)	G(X)
7	-0.243	-0.243
8	-0.17	-0.17
9	-0.114	-0.114
		-0.7

Ta thấy ở trường hợp $F(x)$ tức là trường hợp phương án A. Ta thấy từ $x = -1,5$ chạy đến $x = -1$ thì giá trị của hàm số giảm, từ $x = -1$ đến $x = -0,7$ thì giá trị của hàm số tăng, tức là hàm số nghịch biến trên $(-1,5; -1)$ và đồng biến trên $(-1; -0,7)$. Vậy $x = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số, vậy A thỏa mãn.

Ta chọn A mà không cần xét B, C, D.

Ví dụ áp dụng:

Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^3 - 3mx + 2m$ đạt cực đại tại $x = 2$?

A. $m = 4$

B. $m = -4$

C. $m = 0$

D. Không có giá trị của m

Đáp án D.

Cách 2: Sử dụng chức năng $\frac{d}{dx}$.

Cách làm: Thử các giá trị của tham số m ở các phương án, xem phương án nào làm đạo hàm bằng 0, nếu có nhiều phương án cùng làm đạo hàm bằng 0, thì ta xét đến y'' .

Cũng xét ví dụ 1 ở trên thì ta có:

Sử dụng nút  , nhập vào máy như sau:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{X^3}{3} - 2MX^2 + 3M^2X - 3M \right)_{X=-1}$$

Tiếp theo ấn CALC nhập $X = -1; M = -1$, máy hiện bằng 0, thỏa mãn. Chọn A.

Chú ý: Ở cách làm này, ta cần lưu ý các trường hợp $f'(x_0) = 0$ nhưng x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.